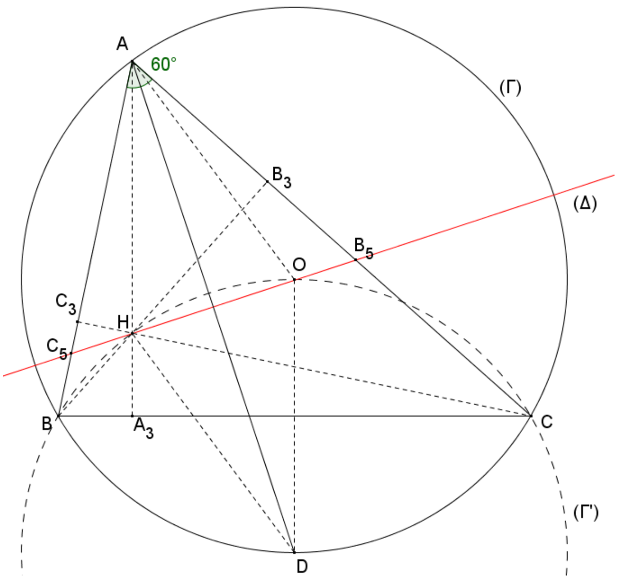
Problema 755
Sobre un ángulo de 60º(VIII)
Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno con AB<AC.
Sea O el circuncentro. Sea H el ortocentro .
Sean B_5 y C_5 respectivemente los puntos de intersección de la recta de Euler con AC y BC.
$HB_5=OC_5$ si y sólo si <A=60º.

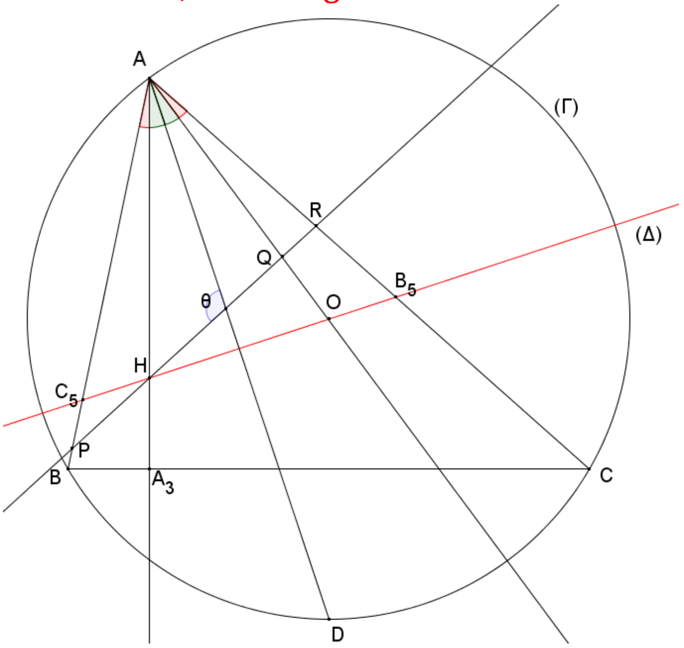
Solution proposée par Philippe Fondanaiche

Note liminaire: ce problème a une parenté étroite avec le problème n°747.
Si l'angle $\angle$BAC = 60°, alors $HB_5=OC_5$.



La droite d'Euler (Δ) du triangle ABC n'est autre que la droite OH.
Soient B_3 et C_3 les pieds des hauteurs issues sur les côtés AC et AB.On a $\angle BHC = \angle B_3HC_3 = 120°$.
Par ailleurs $\angle BOC = 2\angle BAC = 120°$. Les quatre points B,H,O et C sont sur un même cercle (Γ ') de centre D situé au milieu de l'arc BC qui ne contient pas le point A et de même rayon que le cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC.
On retouve la configuration du problème n°747. Comme AO = OD = DH et que les droites AH et OD sont parallèles entre elles,le quadrilatère AODH est soit un losange soit un trapèze isocèle. Le triangle ABC étant acutangle,c'est un losange.La droite d'Euler est alors perpendiculaire à la bissectrice AD de l'angle $\angle$BAC.
Le triangle AB_5C_5 est équilatéral et les triangles AOC_5 et AHB_5 sont isométriques.D'où $HB_5 = OC_5$.

Si $HB_5=OC_5$, alors l'angle $\angle$BAC = 60°.



Il est bien connu que les droites AH et AO sont isogonales par rapport à la bissectrice AD de l'angle $\angle BAC$. Les droites AB et AC d'une part comme les droites AH et AO d'autre part sont respectivement symétriques par rapport à la bissectrice AD. Une droite quelconque passant par H et faisant un angle θ avec la droite AD coupe ce faisceau de droites en quatre points P,H,Q et R. Si l'angle θ est obtus on a PH > QR et a contrario s'il est aigu, on a PH<QR. La condition nécessaire et suffisante pour que PH = QR est que la droite PR soit perpendiculaire à la droite AD. Il en résulte que si $HB_5=OC_5$, la droite d'Euler(Δ) (ou encore la droite OH) est perpendiculaire à la bissectrice AD et l'on a AH = AO.
On retrouve la réciproque du problème n°747 avec AH = AO et la droite AD médiatrice de OH qui entraine $\angle BAC= 60°$.