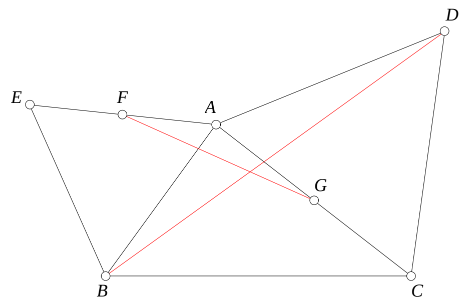
Problema 756. Se tiene un triángulo cualquiera ABC. Sobre los lados AB y AC se construyen exteriormente triángulos equiláteros ABE y ACD. Si F y G son los puntos medios de EA y AC, respectivamente. Calcula la razón BD/FG.

Concurso Provincial de Matemática Secundaria Básica(2005/2006)
Ciudad de La Habana

Solución de Ercole Suppa. Utilizamos las notaciones de geometría del triángulo.



Por el teorema del coseno aplicado a triángulo ABD se deduce que

$$\begin{aligned}
BD^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(A + 60°) \\
&= b^2 + c^2 - 2bc\left(\frac{1}{2}\cos A - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right) \\
&= b^2 + c^2 - bc\cos A + \sqrt{3}bc\sin A \\
&= b^2 + c^2 - bc \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \sqrt{3}bc\sin A \\
&= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S}{2}
\end{aligned}$$

Del mismo modo aplicando el teorema del coseno en el triángulo AFG tenemos

$$\begin{aligned}
BD^2 &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{c}{2}\right)\cos(A + 60°) \\
&= \frac{b^2 + c^2}{4} - \frac{bc}{2}\left(\frac{1}{2}\cos A - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right) \\
&= \frac{b^2 + c^2}{4} - \frac{bc}{4}\cos A + \frac{\sqrt{3}}{4}bc\sin A \\
&= \frac{b^2 + c^2}{4} - \frac{bc}{4} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{\sqrt{3}}{2}S \\
&= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S}{8}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $BD/FG = 2$ y hemos terminado. $\square$

Segunda solución. Dado que $AF : AB = AG : AD = 1 : 2$ y $\angle FAG = \angle BAC + 60° = \angle BAD$, los triángulos $\triangle FAG$ y $\triangle BAD$ son similares con una razón de similitud igual a dos. Por lo tanto $BD/FG = 2$. $\square$