Problema 757.-

Sobre un ángulo de 60º (IX)

Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno con AB<AC. Sea O el circuncentro. Sea H el ortocentro. Sean B_5 y C_5 respectivamente los puntos de intersección de la recta de Euler con AC y AB. Sea D el punto medio del arco de la circunferencia circunscrita que no contiene al punto A.

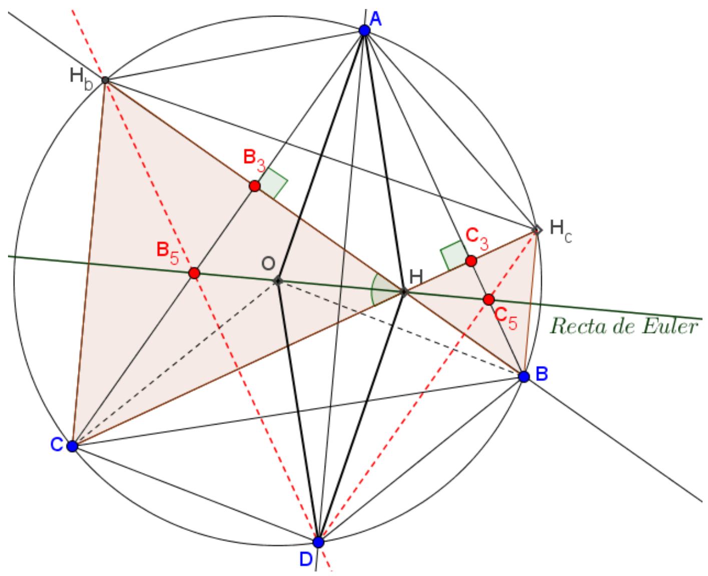
Las rectas DB_5 y DC_5 son respectivamente mediatrices de CH y BH si y sólo si <A=60º.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

($\Rightarrow$) Las rectas DB_5 y DC_5 son respectivamente mediatrices de CH y BH.

Como AC y AB son mediatrices de HH_b y HH_c, respectivamente entonces la recta de Euler es mediatriz de los lados CH_b y BH_c.



En definitiva, dichas rectas CH_b y BH_c son paralelas entre sí y determinan los mismos arcos sobre la circunferencia,

$\measuredangle H_bAH_c = \measuredangle CDB$.

Además como DB_5 y BC_3 son paralelas, las cuerdas $AH_b = BD$.

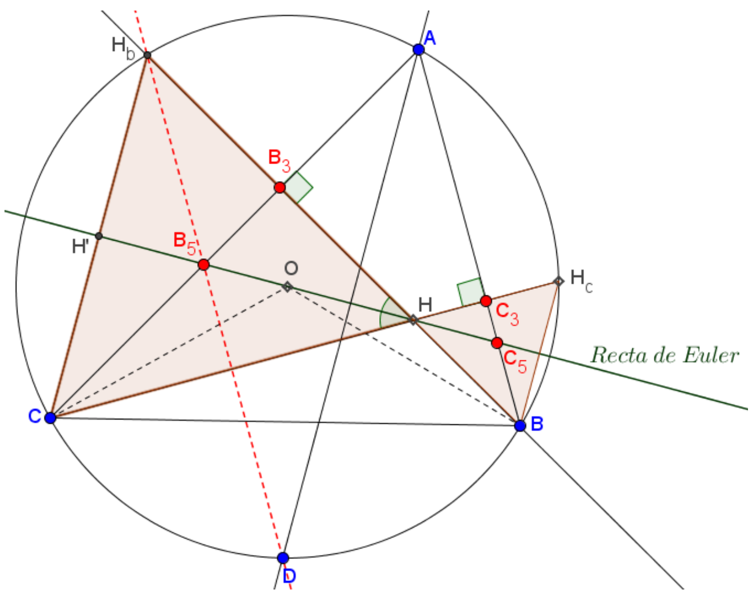
Del mismo modo, probaríamos que $AH_c = CD$.

Por un lado, H es el ortocentro del triángulo ABC. Por tanto, AH es perpendicular al lado BC. Como OD es mediatriz del segmento BC, resulta que AH y OD son paralelas:

Por otra parte, AO es mediatriz del lado H_bH_c y como CH_c y BH_b son perpendiculares a DH_b y DH_c, respectivamente. Por tanto, DH es perpendicular al lado H_bH_c. En definitiva, DH es paralela al radio AO. En definitiva, el cuadrilátero AHOD es un paralelogramo y así AH =OD= R y, por el problema 747 de la Revista, el ángulo en $\measuredangle A = 60º$ cqd ■

($\Leftarrow$) $\measuredangle A = 60º$

Si el ángulo $\measuredangle A = 60º$ entonces ya hemos probado que el triángulo CHH_b es equilátero. Como ya quedó también probado, la recta de Euler es entonces bisectriz del ángulo $\measuredangle CHH_b$ y, por tanto también mediatriz del lado HH_b.



En definitiva, como estas dos mediatrices se cortan en el punto B_5, la recta H_bB_5 será la mediatriz del lado HC.

Ahora bien, esta recta H_bB_5 también será bisectriz del ángulo $\measuredangle CH_bB$ y, por tanto, pasará por D, punto medio del arco de la circunferencia circunscrita que no contiene al punto A cqd ■