

Problema 757

Sobre un ángulo de 60° (IX)

Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno con $AB < AC$.

Sean B_5 y C_5 los puntos de intersección de la recta de Euler con AC y AB.

Sea D el punto medio del arco de la circunferencia circunscrita que no contiene a A.

Las rectas DB_5 y DC_5 son respectivamente mediatrices de CH y de BH si y sólo si $\angle A = 60^\circ$.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

Solución del director.

Sea $\angle A = \alpha = 60^\circ$, $\angle B = \beta$, $\angle C = 120^\circ - \beta$.

Es:

$$\angle HBC = 90^\circ - \angle C = 90^\circ - (120^\circ - \beta) = \beta - 30^\circ, \angle HCB = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - \beta,$$

$$\angle CHB = 180^\circ - \angle HBC - \angle HCB = 180^\circ - (\beta - 30^\circ) - (90^\circ - \beta) = 120^\circ.$$

Por otra parte, es

$$\angle OBC = \angle OCB = 30^\circ, \angle BOC = 120^\circ$$

Por ello OHCB son concíclicos

$$\angle OHC = \angle OBC = 30^\circ, \text{ por lo que el triángulo } CB_5H \text{ es isósceles } 30^\circ, 120^\circ, 30^\circ.$$

Así la recta de Euler construye un triángulo equilátero $A B_5 C_5$.

Es decir, los triángulos BC_5H y CB_5H son $30^\circ 120^\circ 30^\circ$.

$$\angle BHC = 180^\circ - (90^\circ - \beta) - (90^\circ - (120^\circ - \beta)) = 120^\circ$$

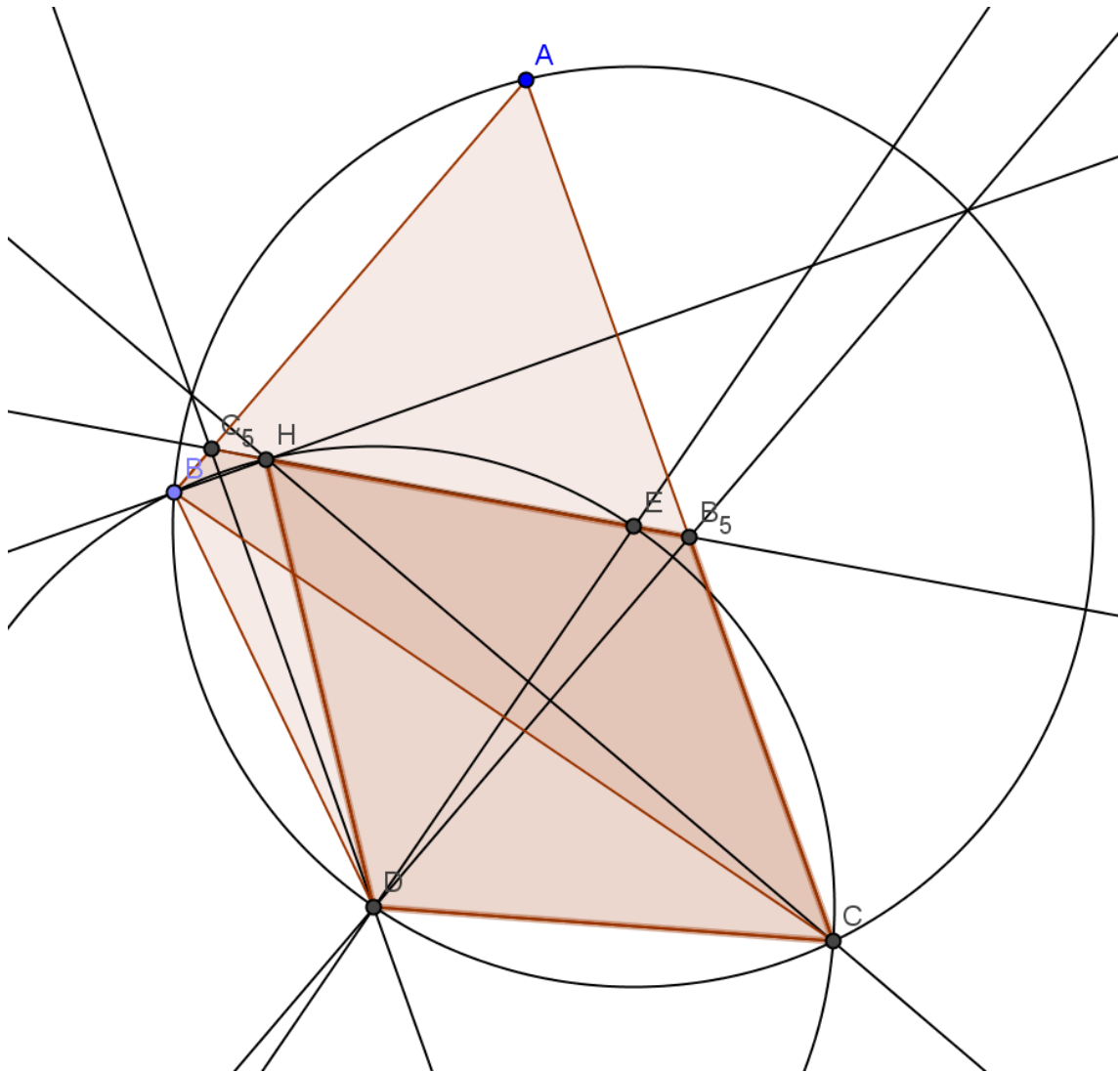
Por otra parte, B es el centro de la circunferencia BHC, por ser $\angle BHC = 120^\circ$, y ser $\angle BDC = 240^\circ$, y D estar en la mediatriz de BC

$$\angle HCD = \angle HCB + \angle DCB = 90^\circ - \beta + 30^\circ = 120^\circ - \beta$$

$$\text{Luego } \angle DHC = 120^\circ - \beta. \text{ Igual para } \angle DBH = \angle DHB = 30^\circ + (90^\circ - (120^\circ - \beta)) = \beta$$

. Así DHB_5C y DHC_5B son cometas, y sus diagonales son perpendiculares, y así DB_5 y DC_5 son respectivamente mediatrices de CH y de BH, c.q.d.

.



Supongamos ahora que es cierto que DB_5 y DC_5 son respectivamente mediatrices de CH y de BH .

$\angle B_5CH = 90^\circ - \alpha$. B_5D al ser mediatriz de CH lo es del triángulo B_5CH con lo que $\angle B_5HC = 90^\circ - \alpha$.

Así $\angle CB_5H = 2\alpha$, y $\angle AB_5H = 180^\circ - 2\alpha$.

De manera análoga se obtiene que $\angle AC_5H = 180^\circ - 2\alpha$.

Así en el triángulo AB_5C_5 , sus ángulos son: α , $180^\circ - 2\alpha$, $180^\circ - 2\alpha$

Debe ser pues $\alpha + (180^\circ - 2\alpha) + (180^\circ - 2\alpha) = 360^\circ - 3\alpha = 180^\circ$, y por último $\alpha = 60^\circ$, cqd.

Rcardo Barroso

Jubilado.

Sevilla.