

Problema 757

Siga $\triangle ABC$ un triangle escalè i acutangle amb $\overline{AB} < \overline{AC}$.

Siguen B_5 , C_5 els peus de la recta d'Euler amb els costats $\overline{AC}$, $\overline{BC}$.

Siga D el punt mig de l'arc de la circumferència circumscrita que no conté A .

Les rectes DB_5 i DC_5 són, respectivament, mediatris de $\overline{CH}$ i $\overline{BH}$ si i només si

$A = 60^\circ$.

Solució Ricard Peiró i Estruch:

($\Rightarrow$)

Suposem que rectes DB_5 i DC_5 són, respectivament, mediatris de $\overline{CH}$ i $\overline{BH}$.

$$\angle ABH = 90^\circ - A.$$

$$\angle BHC_5 = \angle ABH = 90^\circ - A.$$

$$\angle ACH = 90^\circ - A.$$

$$\angle CHB_5 = \angle ABH = 90^\circ - A.$$

$$\angle CHB = 180^\circ - A.$$

$$\text{Aleshores, } 2(90^\circ - A) + 180^\circ - A = 180^\circ.$$

Resolent l'equació, $A = 60^\circ$.

($\Leftarrow$)

Suposem que $A = 60^\circ$.

$$\angle C_5AH = \angle B_5AO = 90^\circ - B.$$

$$\frac{\overline{AH}}{\cos 60^\circ} = \frac{b}{\sin B} = 2R.$$

Aleshores, $\overline{AH} = \overline{AO} = R$

Aleshores, el triangle $\triangle AHO$ és isòsceles.

La bisectriu $\overline{AD}$ de l'angle A del triangle $\triangle AHO$ és bisectriu de l'angle A del triangle

$\triangle AC_5H_5$ i perpendicular a la base, aleshores, el triangle $\triangle AC_5B_5$ és equilàter.

$$\angle ABH = 90^\circ - A = 30^\circ.$$

$$\angle HC_5B = 180^\circ - 60 = 120^\circ.$$

Aleshores, $\angle C_5HB = 30^\circ$.

Aleshores, $\overline{BC_5} = \overline{HC_5}$.

$$\overline{OD} = \overline{DH}.$$

$$\overline{OD} = \overline{OB}.$$

Aleshores, $\overline{BD} = \overline{DH}$.

Aleshores, $\overline{DC_5}$ és mediatriu del segment $\overline{BH}$.

Anàlogament, $\overline{DB_5}$ és mediatriu del segment $\overline{CH}$.

