Problema 757

Sea $\overset{\Delta}{ABC}$ un triángulo escaleno y acutángulo con $\overline{AB} < \overline{AC}$.

Sean B_5, C_5 los puntos de intersección de la recta de Euler con los lados $\overline{AC}$, $\overline{BC}$.

Sea D el punto medio del arco de la circunferencia circunscrita que no contiene A.

Las rectas DB_5 y DC_5 son, respectivamente, mediatrices de $\overline{CH}$ y $\overline{BH}$ si y sólo si $A = 60^o$.

Solución Ricard Peiró i Estruch:

$(\Rightarrow)$

Supongamos que rectas DB_5 i DC_5 son, respectivamente, mediatrices de $\overline{CH}$ y $\overline{BH}$.

$\angle ABH = 90^o - A$.

$\angle BHC_5 = \angle ABH = 90^o - A$.

$\angle ACH = 90^o - A$.

$\angle CHB_5 = \angle ABH = 90^o - A$.

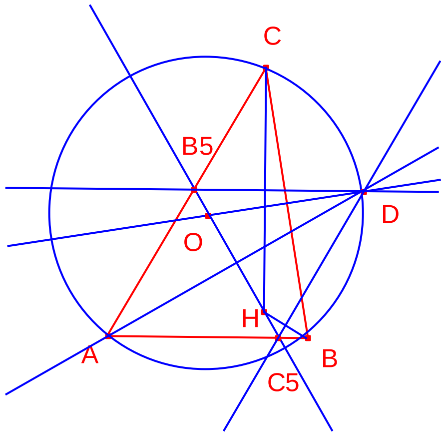
$\angle CHB = 180^o - A$.

Entonces, $2(90^o - A) + 180^o - A = 180^o$.

Resolviendo la ecuación, $A = 60^o$.

$(\Leftarrow)$

Supongamos que $A = 60^o$.



$\angle C_5AH = \angle B_5AO = 90^o - B$.

$$\frac{\overline{AH}}{\cos 60^o} = \frac{b}{\sin B} = 2R.$$

Entonces, $\overline{AH} = \overline{AO} = R$

Entonces, el triángulo $\overset{\Delta}{AHO}$ es isósceles.

La bisectriz $\overline{AD}$ del ángulo A del triángulo $\overset{\Delta}{AHO}$ es bisectriz del ángulo A del triángulo $\overset{\Delta}{AC_5H_5}$ y perpendicular a la base, entonces, el triángulo $\overset{\Delta}{AC_5B_5}$ es equilátero.

$\angle ABH = 90^o - A = 30^o$.

$\angle HC_5B = 180^o - 60 = 120^o$.

Entonces, $\angle C_5HB = 30^o$.

Entonces, $\overline{BC_5} = \overline{HC_5}$.

$\overline{OD} = \overline{DH}$.

$\overline{OD} = \overline{OB}$.

Entonces, $\overline{BD} = \overline{DH}$.

Entonces, $\overline{DC_5}$ es mediatriz del segmento $\overline{BH}$.

Análogamente, $\overline{DB_5}$ es mediatriz del segmento $\overline{CH}$.