

Problema 757

Sobre un ángulo de 60° (IX)

Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno con $AB < AC$.

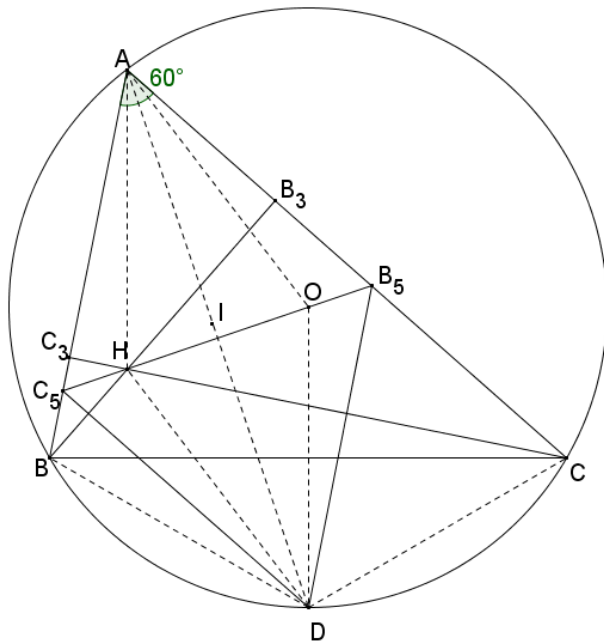
Sean B_5 y C_5 los puntos de intersección de la recta de Euler con AC y AB.

Sea D el punto medio del arco de la circunferencia circunscrita que no contiene a A.

Las rectas DB_5 y DC_5 son respectivamente mediatrices de CH y de BH si y sólo si $\angle A = 60^\circ$.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

Si l'angle $\angle BAC = 60^\circ$, alors DB_5 et DC_5 sont les médiatrices de CH et de BH.



D'après les propriétés démontrées dans les problèmes [n°747](#) et [n°754](#), on sait que si l'angle $\angle BAC$ est égal à 60° , alors :

- le parallélogramme AHDO est un losange et les quatre points B, H, O et C sont sur un même cercle de centre D. On en déduit $AH = AO = DB = DH = DC$.

- la droite d'Euler OH est la bissectrice de l'angle $\angle CHB_3$.

Il en résulte que :

$$\angle ABH = 90^\circ - \angle BAC = 30^\circ = \angle BHC_5 = \angle BHC_3/2 = 30^\circ$$

$$\text{et } \angle ACH = \angle CHB_5 = \angle CHB_3/2 = 30^\circ$$

Conclusion: les triangles BDH et BC_5H sont isocèles et DC_5 est la médiatrice de BH.

De la même manière, les triangles CDH et CB_5H sont isocèles et DB_5 est la médiatrice de CH.

Si DB_5 et DC_5 sont les médiatrices de CH et de BH, alors angle $\angle BAC = 60^\circ$.

On a les égalités d'angles $\angle ABH = \angle BHC_5 = 90^\circ - \angle BAC$ et $\angle ACH = \angle CHB_5 = 90^\circ - \angle BAC$

Il en résulte que : $\angle BHC_5 = \angle CHB_5 = \angle C_5HC_3$.

La droite d'Euler OH est alors la bissectrice de l'angle $\angle BHC_3$ et d'après la réciproque du problème [n°754](#), l'angle $\angle BAC$ est égal à 60° .