

Problema 757

Sobre un ángulo de 60° (IX)

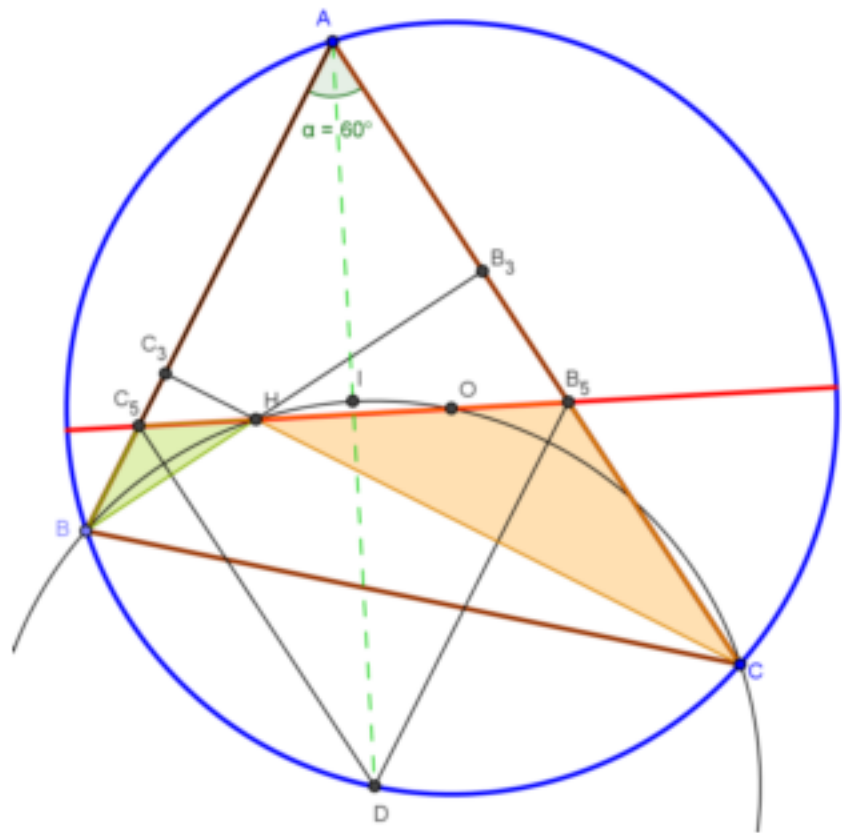
Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno con $AB < AC$.

Sean B_5 y C_5 los puntos de intersección de la recta de Euler con AC y AB . Sea D el punto medio del arco de la circunferencia circunscrita que no contiene a A .

Las rectas DB_5 y DC_5 son respectivamente mediatrices de CH y de BH si y sólo si $A = 60^\circ$.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Si DB_5 y DC_5 son mediatrices de CH y BH respectivamente, los triángulos BC_5H y HB_5C son isósceles y semejantes pues el ángulo en B del primero y el ángulo en C del segundo son iguales a $90 - A$. Por otra parte, al ser H el ortocentro, el ángulo $\sphericalangle BHC$ es el suplementario del de A . Se tienen pues, en H tres ángulos cuya suma es un llano, a saber:

$$(90 - A) + (180 - A) + (90 - A) = 180.$$

De ahí se deduce $A = 60^\circ$.

Recíprocamente, si $A = 60^\circ$, los puntos H y O (también I) están sobre el arco capaz de BC y amplitud 120° .

El centro de este arco es el punto D , por tanto $DC = DH = DB$, por tanto D está en la mediatriz de BH y en la de HC . Sean C_3 , B_3 respectivamente, los pies de las alturas desde C y B .

El ángulo $\sphericalangle BHC_3 = \sphericalangle A = 60$ (por ángulos de lados perpendiculares) y, según el problema 754 de esta revista, la recta de Euler es bisectriz de este ángulo, por tanto $\sphericalangle C_5BH = 30^\circ = \sphericalangle BHC_5$, que nos indica que el triángulo $\triangle BC_5H$ es isósceles, con C_5 equidistando de los otros dos vértices, o de forma equivalente, con C_5 en la mediatriz de BH .

Análogamente con B_5 respecto de CH . Y con esto se concluye la demostración. ■