

Problema 758

Siga el triangle $\triangle ABC$, $B = 30^\circ$.

Sobre l'exterior del costat $\overline{AC}$ és dibuixa el triangle equilàter $\triangle ACD$.

Proveu que $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

Solució Ricard Peiró i Estruch:

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABD$:

$$\overline{BD}^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(A + 60^\circ).$$

$$\overline{BD}^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} \frac{1}{2} - \sin A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

$$\overline{BD}^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + bc\sqrt{3} \sin A.$$

$$\overline{BD}^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + ac\sqrt{3} \sin B.$$

$$\overline{BD}^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{2}ac\sqrt{3}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos 30^\circ. \text{ Aleshores:}$$

$$\overline{BD}^2 = a^2 + c^2 - \frac{1}{2}ac\sqrt{3} + c^2 + \frac{1}{2}ac\sqrt{3}.$$

$$\overline{BD}^2 = a^2 + c^2.$$

$$\text{Per tant, } \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2.$$

