

Problema 758

Sea el triángulo $\triangle ABC$, $B = 30^\circ$.

Sobre el exterior del lado $\overline{AC}$ se dibuja el triángulo equilátero $\triangle ACD$.

Probar que $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

Solución Ricard Peiró i Estruch:

Aplicant el teorema del coseno al triángulo $\triangle ABD$:

$$\overline{BD}^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(A + 60^\circ).$$

$$\overline{BD}^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} \cdot \frac{1}{2} - \sin A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

$$\overline{BD}^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + bc\sqrt{3} \sin A.$$

$$\overline{BD}^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + ac\sqrt{3} \sin 30^\circ.$$

$$\overline{BD}^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + ac\sqrt{3} \sin B.$$

$$\overline{BD}^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{2}ac\sqrt{3}.$$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\triangle ABC$:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos 30^\circ. \text{ Entonces:}$$

$$\overline{BD}^2 = a^2 + c^2 - \frac{1}{2}ac\sqrt{3} + c^2 + \frac{1}{2}ac\sqrt{3}.$$

$$\overline{BD}^2 = a^2 + c^2.$$

Por tanto, $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

