

Problema 759

Siga $\triangle ABC$ un triangle acutangle i escalè amb $\overline{AB} < \overline{AC}$.

Siguen C_4 i B_4 els punts migs dels costats $\overline{AB}$, $\overline{AC}$.

Siguen B_6 i C_6 els punts d'intersecció de OC_4 i OB_4 amb AC i AB ,

Les rectes BB_6 i CC_6 són paral·leles de manera que la recta B_6C_6 talla el costat $\overline{BC}$ en el seu interior si i només si $A = 60^\circ$.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicació personal.

Solució de Ricard Peiró i Estruch:

($\Leftarrow$)

Suposem que $A = 60^\circ$.

Aleshores, els triangles $\triangle ABB_6$, $\triangle ACC_6$ són equilàters.

Per tant, les rectes BB_6 i CC_6 són paral·leles.

C_6 és exterior al costat $\overline{AB}$ ja que $B > A = 60^\circ$.

$\overline{BC}$ i B_6C_6 són diagonals del trapezi isòsceles i equilàter BC_6CB_6 .

Per tant, la recta B_6C_6 talla el costat $\overline{BC}$ en el seu interior.

($\Rightarrow$)

Suposem que Les rectes BB_6 i CC_6 són paral·leles de manera que la recta B_6C_6 talla el costat $\overline{BC}$ en el seu interior.

Siga $\alpha = \angle BCC_6 = \angle B_6BC$.

B_4C_6 és mediatriu del costat $\overline{AC}$, aleshores,

$$A = \angle ACC_6 = C + \alpha$$

C_4B_6 és mediatriu del costat $\overline{AB}$, aleshores,

$$A = \angle ABB_6 = B - \alpha$$

Sumant ambdues expressions:

$$2A = B + C.$$

$2A = 180^\circ - A$. Resolent l'equació:

$$A = 60^\circ.$$

