Problema 759

Sea $\overset{\Delta}{ABC}$ un triángulo acutángulo y escaleno con $\overline{AB} < \overline{AC}$.

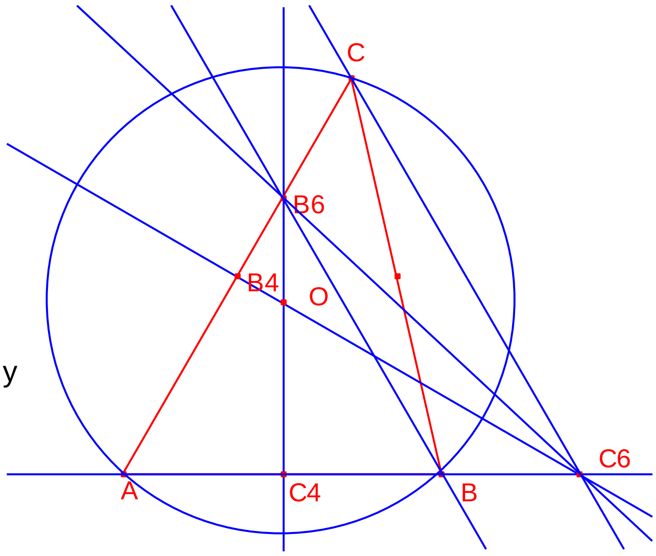
Sean C_4 y B_4 los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.

Sean B_6 y C_6 los puntos de intersección de OC_4 i $\overline{OB_4}$ con AC y AB,

Las rectas BB_6 y CC_6 son paralelas de manera que la recta B_6C_6 se corta con el lado $\overline{BC}$ en un punto interior $\overline{BC}$ de si y sólo si $A = 60^o$.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

Solución de Ricard Peiró i Estruch:



$(\Leftarrow)$

Supongamos que $A = 60^o$.

Entonces, los triángulos $\overset{\Delta}{ABB_6}$, $\overset{\Delta}{ACC_6}$ son equiláteros.

Por tanto, las rectas BB_6 y CC_6 son paralelas.

C_6 es exterior al lado $\overline{AB}$ ya que $B > A = 60^o$.

$\overline{BC}$ y B_6C_6 son diagonales del trapecio isósceles y equilátero BC_6CB_6.

Por tanto, la recta B_6C_6 corta el lado $\overline{BC}$ en el su interior.

$(\Rightarrow)$

Supongamos que les rectas BB_6 y CC_6 son paralelas de manera que la recta B_6C_6 corta el lado $\overline{BC}$ en su interior.

Sea $\alpha = \angle BCC_6 = \angle B_6BC$.

B_4C_6 es mediatriz del lado $\overline{AC}$, entonces,

$A = \angle ACC_6 = C + \alpha$

C_4B_6 es mediatriz del lado $\overline{AB}$, entonces,

$A = \angle ABB_6 = B - \alpha$.

Sumando ambas expresiones:

$2A = B + C$.

$2A = 180^o - A$. Resolviendo la ecuación:

$A = 60^o$.