

Problema 759

Sobre un ángulo de 60° (X)

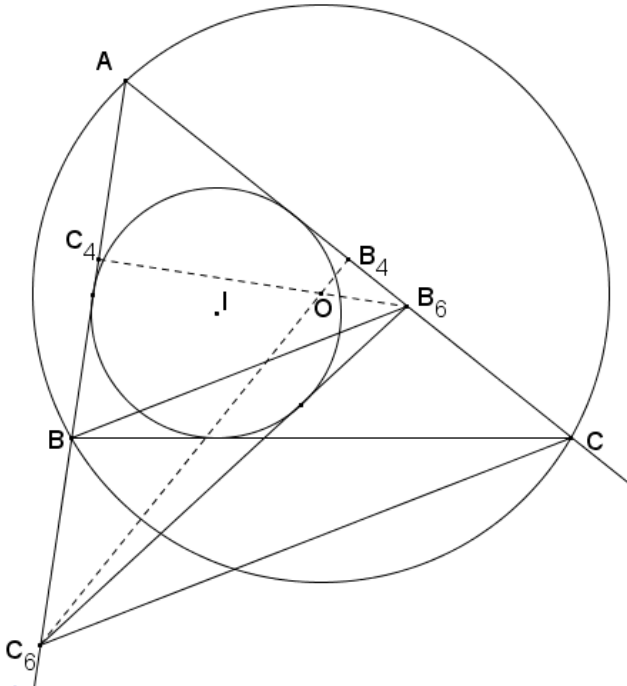
Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno con $AB < AC$.

Sean C_4 y B_4 los puntos medios de los lados AB y AC

Sean B_6 y C_6 los puntos de intersección de OC_4 y OB_4 con AC y AB.

Las rectas BB_6 y CC_6 son paralelas de manera que la recta B_6C_6 se corta con el lado BC en un punto interior de BC si y sólo si $\angle A = 60^\circ$.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

**1^{ère} partie**

Si l'angle $\angle BAC = 60^\circ$, alors les droites BB_6 et CC_6 sont parallèles

Soient O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et I le centre du cercle inscrit. AI est la bissectrice de l'angle $\angle BAC$. Les points B_4 et C_4 étant les milieux des côtés AC et AB, les droites OB_4 (ou encore B_4C_6) et OC_4 (ou encore C_4B_6) sont médiatrices des côtés AC et AB.

Il en résulte que $C_6A = C_6C$. Le triangle C_6AC est isocèle de sommet C_6 .

Comme $\angle C_6AC = \angle BAC = 60^\circ$, on a $\angle C_6CA = 60^\circ$ et le triangle ACC_6 est équilatéral. De la même façon le triangle ABB_6 est équilatéral. Les droites BB_6 et CC_6 sont parallèles.

2^{ème} partie

Les droites BB_6 et CC_6 sont parallèles, alors $\angle BAC = 60^\circ$.

B_4C_6 étant médiatrice de AC, le triangle C_6AC est isocèle de sommet C_6 avec les relations:

$C_6A = C_6C = AC/2\cos(\angle BAC)$ et $\angle C_6AC = \angle C_6CA$.

De la même manière $B_6A = B_6B = AB/2\cos(\angle BAC)$ et $\angle B_6AB = \angle B_6BA$.

Donc $AB/AC = AB_6/AC_6$ et les triangles ABC et AB_6C_6 sont semblables.

En conséquence $\angle AC_6B_6 = \angle ACB$.

Par hypothèse les droites BB_6 et CC_6 sont parallèles entre elles. Comme la droite B_6C_6 coupe le côté BC en son intérieur, l'égalité des angles $\angle AC_6B_6$ et $\angle ACB$ entraîne que les quatre points BB_6CC_6 sont cocycliques et sont les sommets d'un trapèze isocèle.

D'où : $\angle AC_6C = \angle ACC_6$. Le triangle AC_6C est équilatéral comme d'ailleurs le triangle ABB_6 .

Dès lors $\angle BAC = 60^\circ$