

Problema 760

Siga $\triangle ABC$ un triangle escalè i acutangle amb $\overline{AB} < \overline{AC}$.

Siguen C_4 i B_4 els punts migs dels costats $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.

Siguen B_6 i C_6 els punts intersecció de $\overline{OC_4}$, $\overline{OB_4}$ amb els costats $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.

Siga A_2 el peu de la bisectriu de A sobre el costat $\overline{BC}$.

Els punts B_6 , C_6 i A_2 estan alineats si i només si $A = 60^\circ$.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicació personal.

Solució de Ricard Peiró i Estruch.

Aplicant la propietat de la bisectriu: $\frac{\overline{CA_2}}{\overline{BA_2}} = \frac{b}{c}$.

Aplicant raons trigonomètriques als triangles rectangles $\triangle AB_4C_6$,

$\triangle AC_4B_6$:

$$\cos A = \frac{b}{2 \cdot \overline{AC_6}}, \quad \cos A = \frac{c}{2 \cdot \overline{AB_6}}.$$

($\Rightarrow$)

Suposem que B_6 , C_6 i A_2 estan alineats.

Aplicant el teorema de Menelau al triangle $\triangle ABC$:

$$\frac{\overline{BC_6}}{\overline{AC_6}} \cdot \frac{\overline{AB_6}}{\overline{CB_6}} \cdot \frac{\overline{CA_2}}{\overline{BA_2}} = 1. \quad \frac{\overline{AC_6} - c}{\overline{AC_6}} \cdot \frac{\overline{AB_2}}{b - \overline{AB_6}} \cdot \frac{b}{c} = 1.$$

$$\left(1 - \frac{c}{\overline{AC_6}}\right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{b}{\overline{AB_6}} - 1\right)} \cdot \frac{b}{c} = 1. \quad \left(b - \frac{bc}{\overline{AC_6}}\right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{bc}{\overline{AB_6}} - c\right)} = 1.$$

$$(b - 2c \cdot \cos A) \cdot \frac{1}{(2b \cdot \cos A - c)} = 1.$$

$$b - 2c \cdot \cos A = 2b \cdot \cos A - c.$$

$$b + c = 2(b + c) \cos A.$$

$$\cos A = \frac{1}{2}. \text{ Aleshores, } A = 60^\circ.$$

($\Rightarrow$)

$$\text{Suposem que } A = 60^\circ. \quad \overline{AC_6} = \frac{b}{2 \cos 60^\circ} = b, \quad \overline{AB_6} = \frac{c}{2 \cos 60^\circ} = c.$$

Vegem que els punts B_6 , C_6 i A_2 del triangle $\triangle ABC$ compleixen les hipòtesis del teorema de Menelau.

$$\frac{\overline{BC_6}}{\overline{AC_6}} \cdot \frac{\overline{AB_6}}{\overline{CB_6}} \cdot \frac{\overline{CA_2}}{\overline{BA_2}} = \frac{b - c}{b} \cdot \frac{c}{b - c} \cdot \frac{b}{c} = 1.$$

Aleshores, B_6 , C_6 i A_2 estan alineats.

