Problema 760

Sobre un ángulo de 60º(XI)

Sea $\overset{\Delta}{ABC}$ un triángulo acutángulo y escaleno con $\overline{AB} < \overline{AC}$.

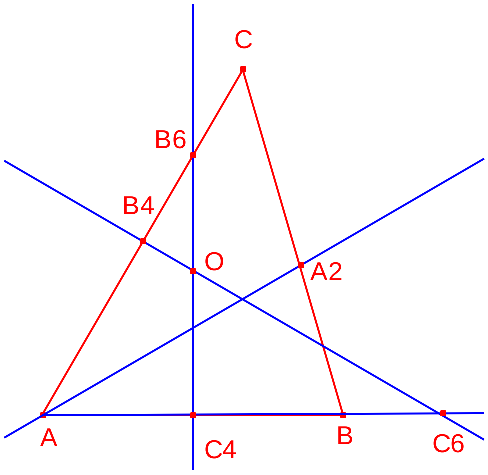
Sean C_4 y B_4 los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

Sean B_6 i C_6 los puntos de intersección de $\overline{OC_4}$ y $\overline{OB_4}$ con $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

Sea A_2 el pie de la bisectriz de A sobre el lado $\overline{BC}$.

Los puntos B_6, C_6 y A_2 están alineados si y sólo $A = 60º$.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.



Solución de Ricard Peiró i Estruch.

Aplicando la propiedad de la bisectriz: $\dfrac{\overline{CA_2}}{\overline{BA_2}} = \dfrac{b}{c}$.

Aplicando razones trigonométricas a los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{AB_4C_6}$, $\overset{\Delta}{AC_4B_6}$:

$$\cos A = \frac{b}{2\cdot \overline{AC_6}}, \quad \cos A = \frac{c}{2\cdot \overline{AB_6}}.$$

(⇒)

Supongamos que B_6, C_6 i A_2 están alineados.

Aplicando el teorema de Menelao al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{\overline{BC_6}}{\overline{AC_6}}\cdot\frac{\overline{AB_6}}{\overline{CB_6}}\cdot\frac{\overline{CA_2}}{\overline{BA_2}} = 1. \qquad \frac{\overline{AC_6}-c}{\overline{AC_6}}\cdot\frac{\overline{AB_2}}{b-\overline{AB_6}}\cdot\frac{b}{c} = 1.$$

$$\left(1-\frac{c}{\overline{AC_6}}\right)\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{b}{\overline{AB_6}}-1\right)}\cdot\frac{b}{c} = 1. \qquad \left(b-\frac{bc}{\overline{AC_6}}\right)\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{bc}{\overline{AB_6}}-c\right)} = 1.$$

$$(b-2c\cdot\cos A)\cdot\frac{1}{(2b\cdot\cos A - c)} = 1.$$

$$b-2c\cdot\cos A = 2b\cdot\cos A - c.$$

$$b+c = 2(b+c)\cos A.$$

$\cos A = \dfrac{1}{2}$. Entonces, $A = 60º$.

(⇒)

Supongamos que $A = 60º$. $\overline{AC_6} = \dfrac{b}{2\cos 60º} = b$, $\overline{AB_6} = \dfrac{c}{2\cos 60º} = c$.

Veamos que los puntos B_6, C_6 y A_2 del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ cumplen las hipótesis del teorema de Menelao.

$$\frac{\overline{BC_6}}{\overline{AC_6}}\cdot\frac{\overline{AB_6}}{\overline{CB_6}}\cdot\frac{\overline{CA_2}}{\overline{BA_2}} = \frac{b-c}{b}\,\frac{c}{b-c}\,\frac{b}{c} = 1.$$

Entonces, B_6, C_6 y A_2 están alineados.