

Problema 760

Sobre un ángulo de 60° (XI)

Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno con $AB < AC$.

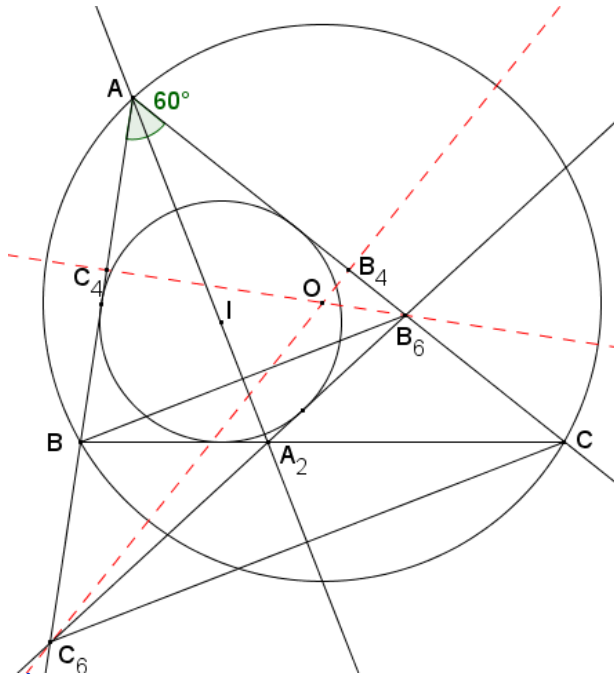
Sean C_4 y B_4 los puntos medios de los lados AB y AC

Sean B_6 y C_6 los puntos de intersección de OC_4 y OB_4 con AC y AB.

Sea A_2 el pie de la bisectriz de A sobre el lado BC.

Los puntos B_6 , C_6 y A_2 están alineados si y sólo si $\angle A = 60^\circ$.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



1^{ère} partie

Si l'angle $\angle BAC = 60^\circ$, alors les points A_6, B_6 et A_2 sont alignés.

Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC. AI est la bissectrice de l'angle $\angle BAC$. Soient B_4 et C_4 les milieux des côtés AC et AB.

B_6C_4 passant par le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est médiatrice du côté AB. Il en résulte que $B_6A = B_6B$. Le triangle B_6AB est isocèle de sommet B_6 . On a donc $\angle B_6AB = \angle BAC = 60^\circ$ et le triangle ABB_6 est équilatéral. De la même façon le triangle ACC_6 est équilatéral. Le trapèze BB_6CC_6 est isocèle et les diagonales BC et B_6C_6 symétriques par rapport à la bissectrice AI de l'angle $\angle BAC$ se coupent en un point de cette bissectrice. Ce point n'est autre que le pied A_2 de AI sur le côté BC.

2^{ème} partie

Les points A_6, B_6 et A_2 sont alignés, alors $\angle BAC = 60^\circ$.

B_6C_4 étant médiatrice de AB, il en résulte que le triangle B_6AB est isocèle de sommet B_6 avec $B_6A = B_6B = AB/2\cos(\angle BAC)$ et $\angle B_6AB = \angle B_6BA$.

De la même manière $C_6A = C_6C = AC/2\cos(\angle BAC)$ et $\angle C_6AC = \angle C_6CA$.

Donc $AB/AC = AB_6/AC_6$. Les triangles ABC et AB_6C_6 qui ont un angle commun sont semblables et $\angle AB_6C_6 = \angle ABC$.

Par hypothèse les points A_6, B_6 et A_2 sont alignés. Les deux triangles ABA_2 et AB_6A_2 qui ont un côté AA_2 commun et deux angles égaux ($\angle BAA_2 = \angle B_6AA_2$ et $\angle AB_6A_2 = \angle AB_6C_6 = \angle ABC = \angle ABA_2$) sont isométriques. D'où $BA = B_6A$. Le triangle ABB_6 est donc équilatéral et $\angle BAC = 60^\circ$.