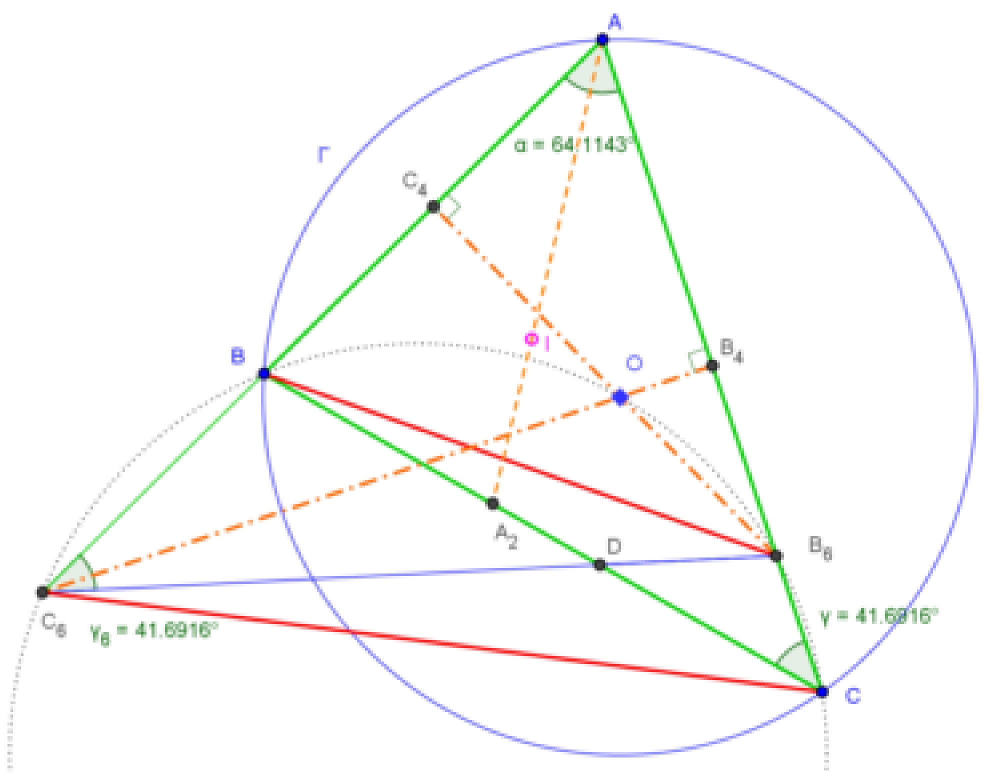
Problema 760.

Sobre un ángulo de 60º (XI).

Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno con AB<AC. Sean C_4 y B_4 los puntos medios de los lados AB y AC. Sean B_6 y C_6 los puntos de intersección de OC_4 y OB_4 con AC y AB.
Sea A_2 el pie de la bisectriz de A sobre el lado BC.
Los puntos B_6, C_6 y A_2 están alineados si y sólo si <A=60º.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Según vimos en el problema 759, los triángulos AB_6C_6 y ABC son semejantes. La razón de semejanza es $2\cdot\cos A$.

.Si $\boldsymbol{A=60º}$, $AC_6 = b = AC$ y $AB_6 = c = AB$.

ABB_6 y AC_6C son equiláteros; los lados BB_6 y C_6C son paralelos. Según el mencionado problema se cortan en el pie A_2 de la bisectriz de A.

Sea D el punto común a BC y a C_6B_6 en el interior de ambos segmentos para poder ser el pie de la bisectriz interior de A.

Aplicando el teorema de Menelao en AC_6B_6 con BC como transversal tenemos:

$$\frac{DB_6}{DC_6}=\frac{CB_6}{AC}\cdot\frac{AB}{BC_6}=\frac{b-AB_6}{b}\cdot\frac{c}{AC_6-c}=\frac{c}{b}\cdot\frac{2b\cdot\cos A-c}{b-2c\cdot\cos A}\qquad(1)$$

.Si $\boldsymbol{C_6, B_6}$ **y** $\boldsymbol{A_2 = D}$ **están alineados**, entonces por el teorema de la bisectriz, la razón (1) es la razón de los lados del ángulo A, $\frac{DB_6}{DC_6}=\frac{AB_6}{AC_6}=\frac{c}{b}$, por tanto, $2b\cdot\cos A - c = b - 2c\cdot\cos A$ de donde se concluye que $A = 60º$. ■