

Problema 762

Siga $\triangle ABC$ un triangle acutangle i escalè amb $\overline{AB} < \overline{AC}$.

Siga H l'ortocentre i I l'íncentre. Aleshores:

$2\angle AHI = 3\angle ACB$ si i només si $A = 60^\circ$.

Solució:

Siga P la projecció de H sobre $\overline{AB}$

$$\angle HAB = 90^\circ - B. \quad \angle AHP = B.$$

$$\angle AHC = 180^\circ - B. \quad \angle AHB = 180^\circ - C.$$

($\Leftarrow$)

Suposem que $A = 60^\circ$.

$$\angle BHC = 180^\circ - A = 120^\circ.$$

$$\angle BOC = 2A = 120^\circ.$$

$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2} = 120^\circ.$$

Aleshores el quadrilàter IHBC és cíclic.

$$\angle IHB = 180^\circ - \angle ICB = 180^\circ - \frac{C}{2}$$

$$\angle AHI = 360^\circ - (\angle IHB + \angle AHB) = 360^\circ - \left(180^\circ - \frac{C}{2} + 180^\circ - C\right) = \frac{3}{2}C.$$

Aleshores, $2\angle AHI = 3\angle ACB$.

($\Rightarrow$)

Suposem que $2\angle AHI = 3\angle ACB$. $\angle AHI = \frac{3}{2}C$.

$$\angle IHC = 180^\circ - (\angle AHP + \angle AHI) = 180^\circ - B - \frac{3}{2}C = A - \frac{1}{2}C.$$

$$\angle ICH = \angle ICB - \angle HCB = \frac{C}{2} - (90^\circ - B) = B + \frac{1}{2}C - 90^\circ.$$

$$\angle CIH = 180^\circ - (\angle IHC + \angle ICH) = 180^\circ - \left(A - \frac{1}{2}C + B + \frac{1}{2}C - 90^\circ\right) = 90^\circ - C.$$

$$\angle HBC = 90^\circ - C.$$

Aleshores, el quadrilàter BHIC és cíclic ja que té els angles oposats suplementaris.

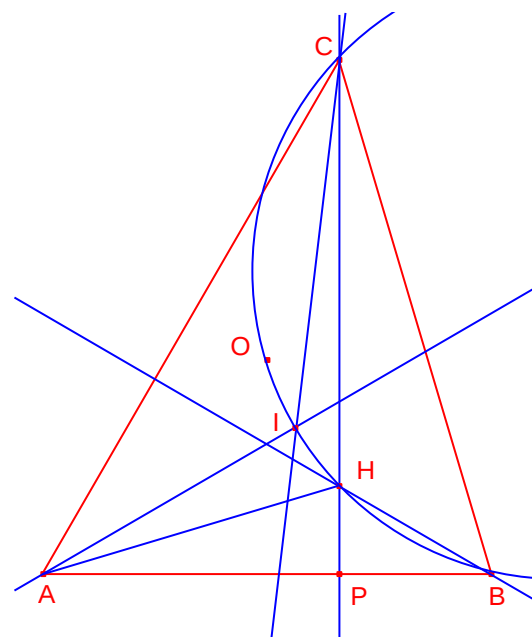
$$\angle ICH = \angle IBH.$$

$$\angle IBH = \angle IBA - \angle HBA = \frac{1}{2}B - (90^\circ - A) = A + \frac{1}{2}B - 90^\circ$$

$$B + \frac{1}{2}C - 90^\circ = A + \frac{1}{2}B - 90^\circ.$$

$$\frac{B+C}{2} = A.$$

$$\frac{180^\circ - A}{2} = A. \text{ Resolent l'equació: } A = 60^\circ.$$



Nota: En aquest cas el circumcentre O del triangle $\triangle ABC$ pertany a la circumferència circumsrita al quadrilàter IHBC.