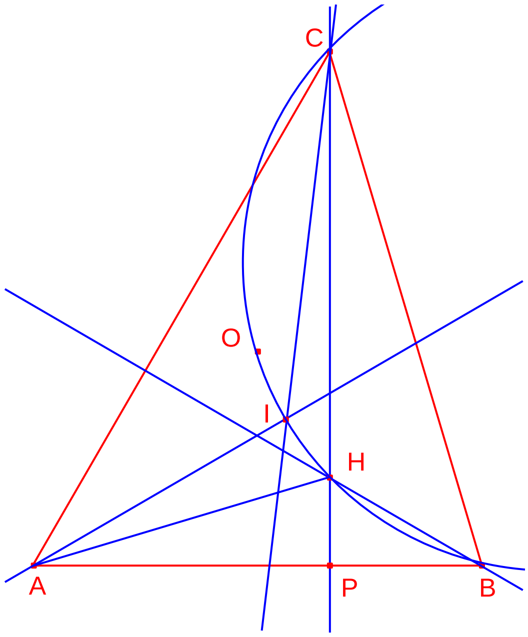
Problema 762

Sea $\overset{\Delta}{ABC}$ un triángulo acutángulo y escaleno con $\overline{AB} < \overline{AC}$.
Sea H el ortocentro e I el incentro . Entonces:
$2\angle AHI = 3\angle ACB$ si sólo si $A = 60^o$.



Solución de Ricard Peiró:

Sea P la proyección de H sobre $\overline{AB}$

$\angle HAB = 90^o - B$. $\angle AHP = B$.

$\angle AHC = 180^o - B$. $\angle AHB = 180^o - C$.

$(\Leftarrow)$

Supongamos que $A = 60^o$.

$\angle BHC = 180^o - A = 120^o$.

$\angle BOC = 12A = 120^o$.

$\angle BIC = 90^o + \frac{A}{2} = 120^o$.

Entonces el cuadrilátero IHBC es cíclico.

$\angle IHB = 180^o - \angle ICB = 180^o - \frac{C}{2}$

$\angle AHI = 360^o - (\angle IHB + \angle AHB) = 360^o - \left(180^o - \frac{C}{2} + 180^o - C\right) = \frac{3}{2}C$.

Entonces, $2\angle AHI = 3\angle ACB$.

$(\Rightarrow)$

Supongamos que $2\angle AHI = 3\angle ACB$. $\angle AHI = \frac{3}{2}C$.

$\angle IHC = 180^o - (\angle AHP + \angle AHI) = 180^o - B - \frac{3}{2}C = A - \frac{1}{2}C$.

$\angle ICH = \angle ICB - \angle HCB = \frac{C}{2} - (90^o - B) = B + \frac{1}{2}C - 90^o$.

$\angle CIH = 180^o - (\angle IHC + \angle ICH) = 180^o - \left(A - \frac{1}{2}C + B + \frac{1}{2}C - 90^o\right) = 90^o - C$.

$\angle HBC = 90^o - C$.

Entonces, el cuadrilátero BHIC os cíclico ya que tiene los ángulos opuestos suplementarios.

$\angle ICH = \angle IBH$.

$\angle IBH = \angle IBA - \angle HBA = \frac{1}{2}B - (90^o - A) = A + \frac{1}{2}B - 90^o$

$B + \frac{1}{2}C - 90^o = A + \frac{1}{2}B - 90^o$. $\frac{B+C}{2} = A$.

$\frac{180^o - A}{2} = A$. Resolviendo la ecuación: $A = 60^o$.

Nota: En este caso el circuncentro O del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ pertenece a la circunferencia circunscrita al cuadrilátero IHBC.