

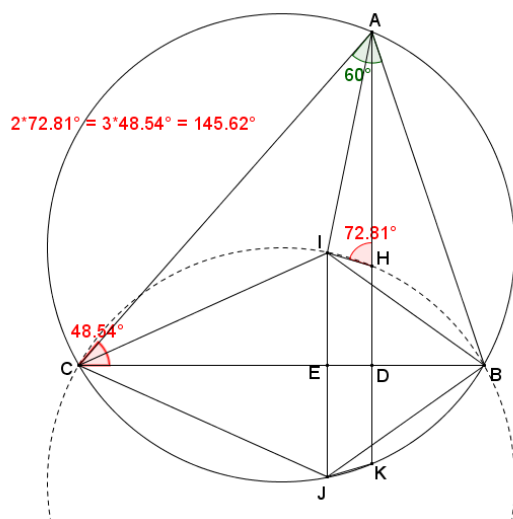
Problema n° 762

Sobre un ángulo de 60° (XII)

Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno con $AB < AC$.

Sea H el ortocentro, e I el incentro, $2 < \angle AHI = 3 < \angle ACB$ si y sólo si $\angle A = 60^\circ$

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Hypothèse : $\angle BAC = 60^\circ$.

Soient D, K, E, J pris dans cet ordre les points d'intersection de la droite AH et de la perpendiculaire issue de I à BC respectivement avec ce côté BC et le petit arc BC du cercle circonscrit à ABC (voir figure supra)

On a les relations d'angles $\angle BIC = 180^\circ - \angle CBI - \angle BCI = 180^\circ - (\angle ABC + \angle ACB)/2 = 90^\circ + \angle BAC/2 = 120^\circ$.

Comme ABJC est inscriptible, on a par ailleurs $\angle BJC = 180^\circ - \angle BAC = 120^\circ$.

IJ étant perpendiculaire à BC, BICJ est un « cerf-volant » et le triangle BIJ est isocèle de sommet B. D'où $\angle CBJ = \angle CBI = \angle ABC/2$.

D'après une propriété bien connue de l'orthocentre, le point K est symétrique de H par rapport à D. Donc HIJK est un trapèze isocèle et $\angle AHI = 180^\circ - \angle IHK = 180^\circ - \angle AKJ$.

Comme ABJK est un quadrilatère inscriptible, on a $\angle ABJ = 180^\circ - \angle AKJ$.

D'où $\angle AHI = \angle ABJ = \angle ABC + \angle CBJ = 3 \angle ABC/2$.

Il en résulte $2 \angle AHI = 3 \angle ABC$.

Cqfd.

Réciproque : $2 \angle AHI = 3 \angle ABC$

On pose $\alpha = \angle BAC/2$ et $\beta = \angle ABC/2$. D'où $\angle AHI = 3\beta/2$.

On a les relations d'angles :

$$\angle BIH = 180^\circ - \angle IBH - \angle IHB,$$

$$\angle IBH = \angle ABH - \angle ABI = 90^\circ - \alpha - \beta/2,$$

$$\angle IHB = \angle AHB - \angle AHI = \alpha + \beta - 3\beta/2 = \alpha - \beta/2,$$

$$\angle ICH = \angle ACI - \angle ACH = 90^\circ - \alpha/2 - \beta/2 - (90^\circ - \alpha) = (\alpha - \beta)/2.$$

D'où $\angle BIH = 90^\circ + \beta$. Comme $\angle BCH = 90^\circ - \beta$, les quatre points B, I, H, C sont cocycliques.

D'où l'équation $\angle IBH = \angle ICH$, c'est à dire $90^\circ - \alpha - \beta/2 = (\alpha - \beta)/2$, qui donne $\alpha = 60^\circ$

Cqfd