

Problema 763.

Hallar el perímetro mínimo de un triángulo cualquiera (abc) conocidas las alturas correspondientes a los lados a y b.

Sánchez, J. (2016): Comunicación personal.

El profesor Ricard Peiró resuelve un caso.

Determinar el perímetro mínimo de un triángulo $\triangle ABC$ conocidas dos alturas $h_a = h_b$.

Solución:

Sean $h_a = \overline{AD}$, $h_b = \overline{BE}$ alturas del triángulo $\triangle ABC$.

Si $h_a = h_b$. L'area del triángulo és $\frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2}$.

Entonces, $a = b$, el triángulo és isòscele.

Aplicando raons trigonomètriques al triángulo rectángulo $\triangle ADB$:

$$c = \frac{1}{\sin B} h_a$$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\triangle ABC$:

$$b^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos B.$$

$$2b = \frac{1}{\cos B} c.$$

El perímetro del triángulo $\triangle ABC$ és:

$$P(b, c) = 2b + c.$$

$$P(B) = \frac{1}{\cos B} \frac{1}{\sin B} h_a + \frac{1}{\sin B} h_a, \quad B = A \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$P(B) = h_a \left(\frac{2}{\sin 2B} + \frac{1}{\sin B} \right)$$

$$P'(B) = h_a \left(\frac{-4 \cos 2B}{\sin^2 2B} + \frac{-\cos B}{\sin^2 B} \right).$$

$$P'(B) = 0.$$

$$-4 \cos 2B \cdot \sin^2 B - \cos B \cdot \sin^2 2B = 0. \text{ Simplificant:}$$

$$\cos^3 B + 2 \cos^2 B - 1 = 0.$$

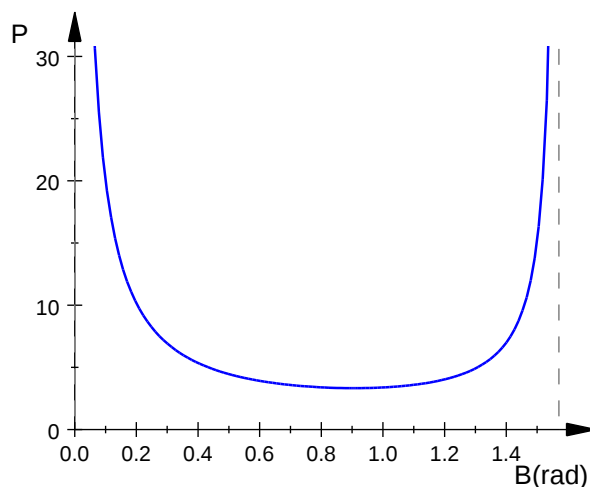
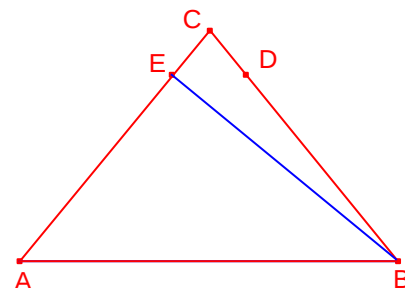
Resolviendo la ecuación:

$$\cos B = -1, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}. \text{ La única solución posible es:}$$

$$\cos B = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad B = \arccos \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 51^\circ 49' 38". \quad B \approx 0.9045568943 \text{ rad}$$

Con la segunda derivada comprobamos que si $\cos B = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ es un mínimo de la función.

Por tant0, poddemos calcular $a = b$, c.



$$\sin B = \frac{\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}}{2}.$$

$$a = b = \frac{1}{2\cos B} \frac{1}{\sin B} h_a = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{5})\sqrt{1+\sqrt{5}}}{8} h_a \approx 1.029085514 h_a.$$

$$c = \frac{1}{\sin B} h_a = \frac{\sqrt{2(1+\sqrt{5})}}{2} h_a \approx 1.27201965 h_a.$$