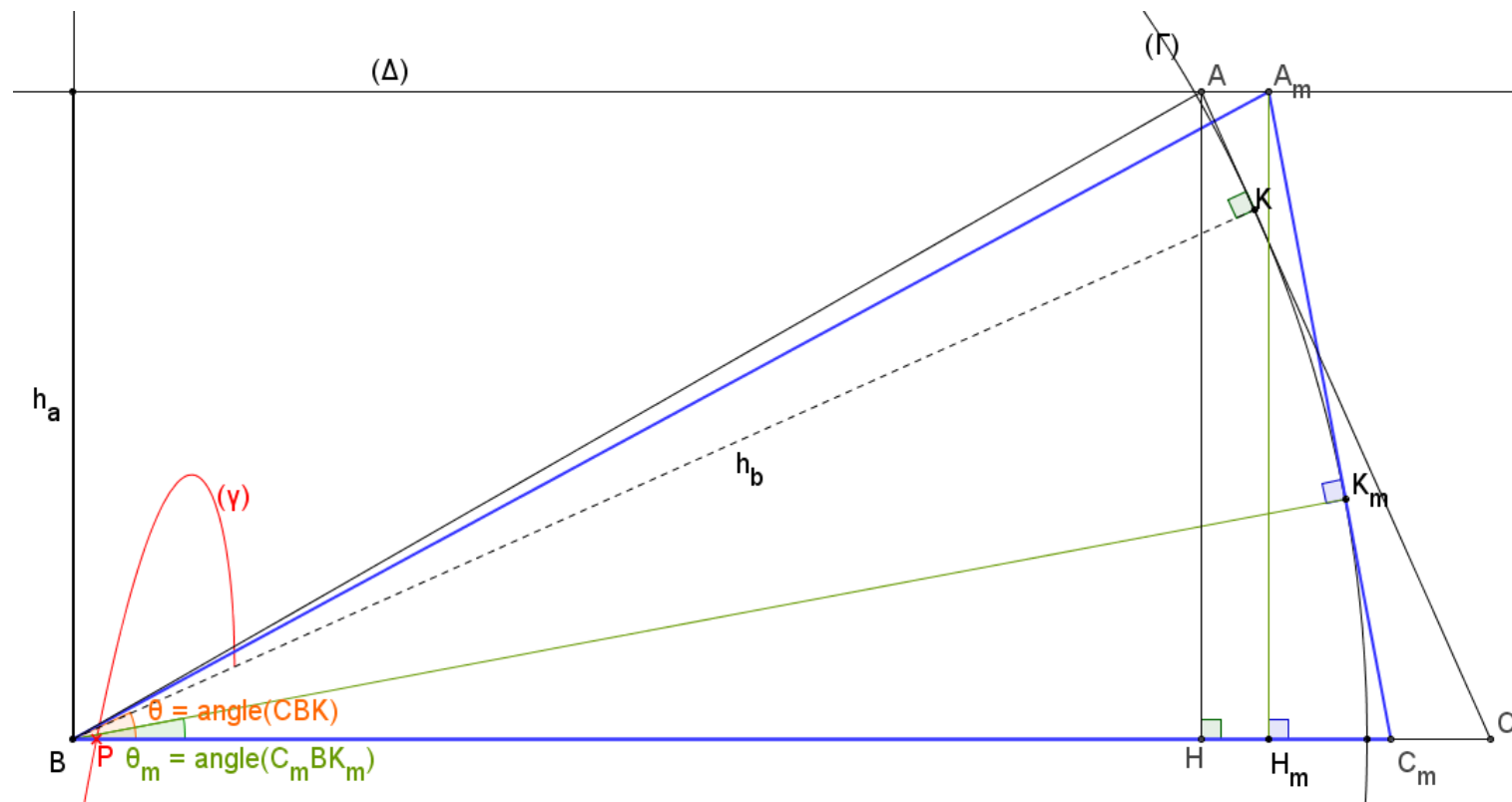


Problema 763

Hallar el perímetro mínimo de un triángulo cualquiera (abc) conocidas las alturas correspondientes a los lados a y b.

Sánchez, J. (2016): Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Par hypothèse on connaît les hauteurs $AH = h_a$ et $BK = h_b$ d'un triangle ABC . Sans perte de généralité on suppose $h_b \geq h_a$.

Pour construire un triangle ABC qui admet deux hauteurs de longueurs h_a et h_b , il suffit de tracer une droite (Δ) parallèle à l'axe des x et d'ordonnée h_a puis le cercle de centre B et de rayon h_b . Soit K un point quelconque de l'arc (Γ) de ce cercle compris entre l'axe des abscisses et la droite (Δ) . La tangente en K à (Γ) coupe respectivement l'axe des abscisses et la droite (Δ) aux points A et C qui sont les deux sommets autres que B du triangle ABC .

Si l'on désigne par θ l'angle $\angle CBK$, le périmètre du triangle ABC est une fonction $p(\theta)$ de θ , h_a et h_b .

En effet $p = BC + AC + AB$ avec:

$$BC = h_b / \cos(\theta)$$

$$AC = AH / \cos(\theta) = h_a / \cos(\theta)$$

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = AH^2 + (AC - CH)^2 = AH^2 + AC^2 + CH^2 - 2AC \cdot CH \text{ avec } CH = AC \cdot \sin(\theta)$$

$$\text{D'où } AB = \frac{\sqrt{h_a^2 + h_b^2 - 2h_a h_b \sin(\theta)}}{\cos(\theta)}$$

$$\text{Il en résulte } p(\theta) = \frac{h_a + h_b + \sqrt{h_a^2 + h_b^2 - 2h_a h_b \sin(\theta)}}{\cos(\theta)}$$

Une condition nécessaire pour que $p(\theta)$ soit un extremum est $dp/d\theta = 0$

Quand K est sur l'axe des abscisses, le périmètre du triangle ABC est égal à $p_1 = h_a + h_b + \sqrt{h_a^2 + h_b^2}$ et quand K est sur la droite (Δ) , il est égal à $p_2 = h_b \cdot (1 +$

$$\frac{h_a + h_b}{\sqrt{h_b^2 - h_a^2}})$$

Quel que soit θ tel que $0 \leq \theta \leq \arcsin(h_a/h_b)$, comme $h_a \leq h_b$, on peut vérifier que lorsque K parcourt l'arc de cercle (Γ) :

$$\frac{h_a + h_b + \sqrt{h_a^2 + h_b^2 - 2h_a h_b \sin(\theta)}}{\cos(\theta)} \leq p_1 = h_a + h_b + \sqrt{h_a^2 + h_b^2}$$

et

$$\frac{h_a + h_b + \sqrt{h_a^2 + h_b^2 - 2h_a h_b \sin(\theta)}}{\cos(\theta)} \leq p_2 = h_b \cdot (1 + \frac{h_a + h_b}{\sqrt{h_b^2 - h_a^2}})$$

En calculant la dérivée de p par rapport à θ , on a l'équation suivante dont l'inconnue est $\sin(\theta)$:

$$f(\theta) = -h_a h_b (1 + \sin^2(\theta)) + \sin(\theta) \cdot [h_a^2 + h_b^2 + (h_a + h_b) \cdot \sqrt{h_a^2 + h_b^2 - 2h_a h_b \sin(\theta)}] = 0$$

$$\text{En posant } x = \sin(\theta), \text{ on obtient la fonction } f(x) = -(1 + x^2) + x(h_a^2 + h_b^2 + (h_a + h_b) \sqrt{h_a^2 + h_b^2 - 2h_a h_b x}) = 0.$$

Le tracé de la courbe (γ) représentative de $f(x)/h_a h_b$ est donné dans la figure Geogebra ci-dessus.

Pour $0 \leq x \leq h_a/h_b$, soit $0 \leq \theta \leq \arcsin(h_a/h_b)$, cette courbe (γ) a un point d'intersection unique P avec l'axe des abscisses. La longueur du segment BP est alors la mesure du sinus de l'angle θ_m correspondant à un extremum du périmètre p .

Comme $p(\theta) \leq p_1$ et $p(\theta) \leq p_2$, il en résulte que θ_m donne bien le minimum de $p(\theta)$.

La construction du point K_m et celle du triangle $A_m B C_m$ avec le logiciel Geogebra sont alors immédiates.

Application numérique

$h_a = 5$ et $h_b = 10$. On obtient les mesures suivantes des côtés du triangle $A_m B C_m$ en bleu:

$A_m B = 10.5017547574\dots$, $B C_m = 10.1752425663\dots$ et $C_m A_m = 5.0876212831\dots$ soit $p_m = 25.7646186168\dots$