Problema 764

Sobre un ángulo de 60º (XIII)

Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno con $AB<AC$.

Sean A_2 y B_2 los pies de las bisectrices de A y B.

Conociendo que $AB + BA_2= AB_2+BB_2$, es $<ABC = 80°$, si y sólo si $<A=60º$.

Fondanaiche, P. (2016): Comunicación personal.

Solución del director

Sea $\angle ABC=80º$

Estudiemos el valor de $AB+BA_2$

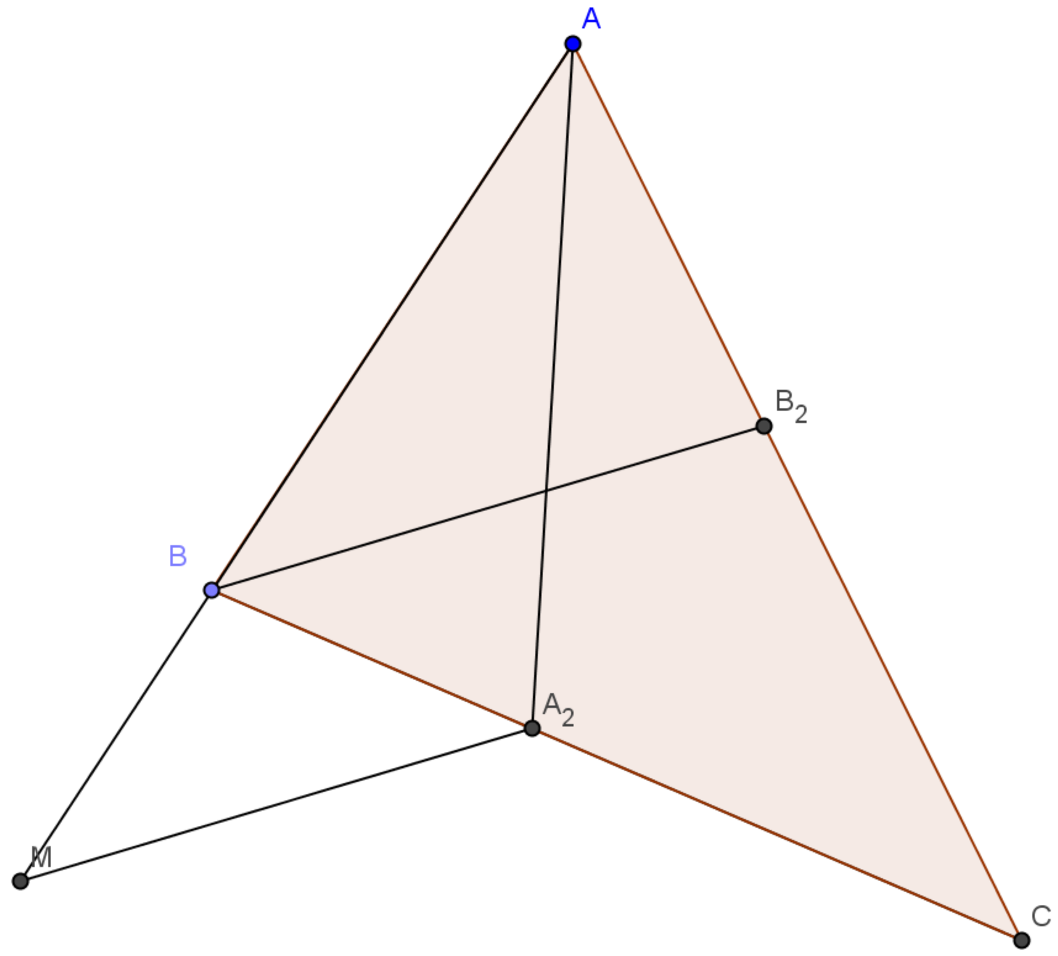
Prolonguemos en AB, para lo que haremos el triángulo BA_2M isósceles en B.

Así tendremos el triángulo AA_2M que tiene de ángulos 30º, 110º ,40º.

Al ser BB_2C isósceles, $BB_2= B_2C$, con lo que $AB_2+BB_2 = AB_2+B_2C$.

El triángulo AA_2C tiene de ángulos 30º, 110º ,40º.

Así es cqd, que $AB + BA_2= AB_2+BB_2$.



Una aproximación de la proposición contraria.

El triángulo ABC es tal que ∠ABC=80º y, sean A_2 y B_2 los pies de las bisectrices de A y B, conociendo que AB + BA_2= AB_2+BB_2 .

Supongamos que sea $\angle BAC = 2\alpha$. Será $\angle ACB = 100 - 2\alpha$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que AB=1.

Es en el triángulo ABA_2, $\frac{BA_2}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin(100º-\alpha)}$, y en el triángulo ABB_2, $\frac{BB_2}{\sin(2\alpha)} = \frac{1}{\sin(140º-2\alpha)}$.

$$\frac{AB_2}{\sin 40º} = \frac{1}{\sin(140º - 2\alpha)}$$

Así debemos resolver la ecuación trigonométrica

$1 + \frac{\sin(\alpha)}{\sin(100º-\alpha)} = \frac{\sin(2\alpha)+\sin 40º}{\sin(140º-2\alpha)}$

Que es: $\sin(\alpha)\sin(140º - 2\alpha) + \sin(100º - \alpha)\,[\sin(140º - 2\alpha) - \sin(2\alpha) - \sin 40º] = 0$

Dado que no tengo programa adecuado para resolver esta ecuación, y que se convierte en muy grande al desarrollarla, voy a comprobar si la solución pedida en el problema la satisface.

Tomemos pues $\alpha = 30º$

Debería ser, con aproximación a las centésimas:

0.5 *0.985 + (0.94)*[0.985-0.866-0.643]=0

Lo que concuerda.

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado

Sevilla