

Problema n° 764

Sobre un ángulo de 60° (XIII)

Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno con $AB < AC$.

Sean A_2 y B_2 los pies de las bisectrices de A y B.

Conociendo que $AB + BA_2 = AB_2 + BB_2$, es $\angle ABC = 80^\circ$, si y sólo si $\angle A = 60^\circ$.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

On démontre d'abord la propriété suivante :

Lemme: dans un triangle ABC acutangle et scalène avec $AB < AC$ qui a pour bissectrices AA_2 et BB_2 , on a l'égalité $AB + BA_2 = AB_2 + BB_2$ si et seulement si l'angle en B est le double de l'angle en C, c'est à dire $\angle ABC = 2 \angle ACB$.

Démonstration:

1er cas : par hypothèse $\angle ABC = 2 \angle ACB$.

On a $B_2BC = B_2CB$. Le triangle BB_2C est isocèle de sommet B_2 . Il en résulte $AB_2 + BB_2 = AC$.

La perpendiculaire issue de C à la bissectrice AA_2 coupe la demi-droite Ax en un point D situé sur la droite AX en dehors du côté AB. Les triangles ACD et A_2CD sont isocèles de sommets A et A_2 .

D'où : $\angle ACD = \angle ADC$ et $\angle A_2CD = \angle A_2DC$. On obtient alors $\angle BDA_2 = \angle ACA_2 = \angle B_2BA_2$. La droite (AD_2) est donc parallèle à la droite (B_2B) . D'où $\angle BA_2D = \angle B_2BA_2 = \angle BDA_2$. Le triangle BDA_2 est isocèle de sommet B.

D'où $AB_2 + BB_2 = AC = AD = AB + BD = AB + BA_2$. Cqfd

2ème cas : par hypothèse $AB + BA_2 = AB_2 + BB_2$

Soient les angles $2\beta = \angle ABC$ et $2\gamma = \angle ACB$ avec par hypothèse $\beta \leq 45^\circ$ et $\beta \geq \gamma$. D'où $\angle BAA_2 = 90^\circ - \beta - \gamma$.

La loi des sinus appliquée aux triangles ABA_2 et ABB_2 donne les dimensions des segments BA_2 , AB_2 et BB_2 en fonction de AB , β et γ , à savoir:

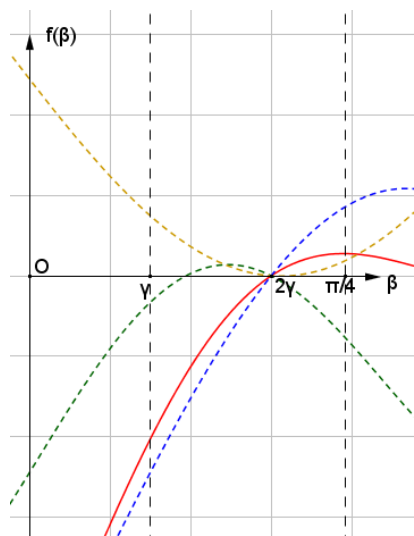
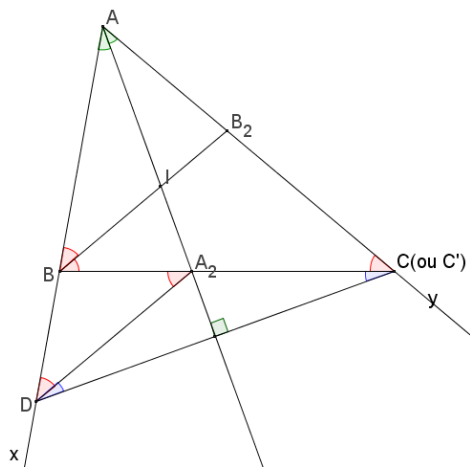
$BB_2 = \sin(2\beta + 2\gamma) \cdot AB / \sin(\beta + 2\gamma)$, $AB_2 = \sin(\beta) / \sin(\beta + 2\gamma)$ et $BA_2 = \cos(\beta + \gamma) \cdot AB / \cos(\beta - \gamma)$ avec $\beta + 2\gamma$ toujours $< 180^\circ$.

Comme par hypothèse $AB + BA_2 = AB_2 + BB_2$, on obtient une relation entre les angles β et γ de la forme:

$[\sin(2\beta + 2\gamma) + \sin(\beta)] \cdot \cos(\beta - \gamma) = [\cos(\beta + \gamma) + \cos(\beta - \gamma)] \cdot \sin(\beta + 2\gamma)$ qui peut encore s'écrire grâce à la formule trigonométrique $2\sin(u) \cdot \cos(v) = \sin(u + v) + \sin(u - v)$:

$$f(\beta) = [\sin(3\beta + \gamma) - \sin(2\beta + 3\gamma)] + [\sin(\beta + 3\gamma) - \sin(2\beta + \gamma)] + [\sin(2\beta - \gamma) - \sin(3\gamma)] = 0$$

Les trois expressions contenues entre crochets [...] s'annulent pour $\beta = 2\gamma$, c'est à dire quand l'angle en B est le double de l'angle en C et on vérifie qu'avec les hypothèses $\gamma < \beta \leq 45^\circ$, la courbe représentative de $f(\beta)$ en rouge comme celles des fonctions définies entre crochets ne s'annulent que pour $\beta = 2\gamma$. Cqfd



L'application du lemme permet de conclure rapidement:

1er cas: $AB + BA_2 = AB_2 + BB_2$ et $\angle BAC = 60^\circ$.

Il en résulte $2\beta + 2\gamma = 120^\circ$. Comme $\beta = 2\gamma$, on en déduit $\angle ABC = 2\beta = 80^\circ$

2ème cas : $AB + BA_2 = AB_2 + BB_2$ et $\angle ABC = 80^\circ$

Comme $\gamma = \beta/2$, on en déduit $\gamma = 40^\circ$ et $\angle BAC = 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ$.

Nota important: Si on admet que le triangle ABC est obtusangle, alors si $\angle ABC = 120^\circ$, la propriété $AB + BA_2 = AB_2 + BB_2$ est vraie quelles que soient les valeurs des angles en A et en C.