Problema 764

Sobre un ángulo de 60º(XIII)

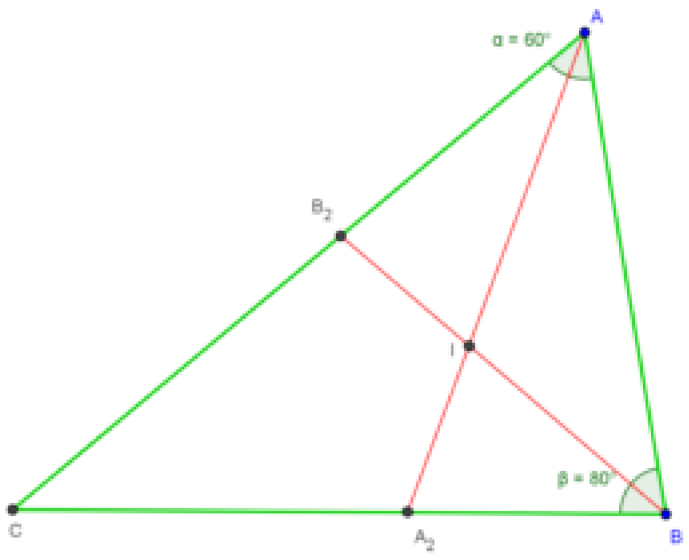
Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno con $AB < AC$.

Sean A_2 y B_2 los pies de las bisectrices de A y B.

Conociendo que $AB + BA_2 = AB_2 + BB_2$, es $< ABC = 80°$, si y sólo si $< A = 60º$.

Fondanaiche, P. (2016): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Según el teorema de los senos en el triángulo ABB_2 tenemos

$$\frac{BB_2}{sen\ A} = \frac{AB_2}{sen\ \frac{B}{2}} = \frac{BB_2 + AB_2}{sen\ A + sen\ \frac{B}{2}} = \frac{AB + BA_2}{sen\ A + sen\ \frac{B}{2}}$$

Tomando la igualdad entre la segunda y la cuarta de estas fracciones y aplicando ahora el teorema de la bisectriz podemos escribir

$$\frac{AB_2}{sen\ \frac{B}{2}} = \frac{bc}{(a+c)\cdot sen\ \frac{B}{2}}$$

$$\frac{AB + BA_2}{sen\ A + sen\ \frac{B}{2}} = \frac{c + \frac{ac}{b+c}}{sen\ A + sen\ \frac{B}{2}} = \frac{c(a+b+c)}{(b+c)\left(sen\ A + sen\ \frac{B}{2}\right)}$$

Así pues

$$\frac{a+b+c}{(b+c)\left(sen\ A + sen\ \frac{B}{2}\right)} = \frac{b}{(a+c)\cdot sen\ \frac{B}{2}}$$

Quitamos denominadores y agrupamos en $sen\ \frac{B}{2}$

$$[(a+b+c)(a+c) - b(b+c)]\ sen\ \frac{B}{2} = b(b+c) sen\ A = a(b+c) sen\ B$$

Teniendo en cuenta que B es el ángulo doble de $\frac{B}{2}$, podemos simplificar la expresión última

$$(a+b+c)(a+c) - b(b+c) = 2a(b+c)\cdot \cos\frac{B}{2}$$

Desarrollamos el primer término de esta igualdad

$$\begin{aligned}(a+b+c)(a+c) - b(b+c) &= a^2 + c^2 + 2ac + b(a-b)\\ &= 2ac\cdot\cos B + 2ac + ab = a\left(4c\cdot\cos^2\frac{B}{2} + b\right)\end{aligned}$$

Con ello nos queda ahora

$$\boxed{4c\cdot\cos^2\frac{B}{2} + b = 2(b+c)\cdot\cos\frac{B}{2} \qquad (*)}$$

Esa expresión es la que resumen las condiciones del enunciado.

Tomando como unidad el diámetro del círculo circunscrito al triángulo identificamos la medida de cada lado con el valor del seno del ángulo opuesto.

Tendremos $b = \text{sen}\ B = 2\cdot\text{sen}\ \frac{B}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}$, $c = \text{sen}\ C$, y así simplificamos la expresión (*):

$$\boxed{2c\cdot\cos\frac{B}{2} + \text{sen}\ \frac{B}{2} = b + c \qquad (**)}$$

$$2\cdot\text{sen}\ C\cdot\cos\frac{B}{2} + \text{sen}\ \frac{B}{2} = 2\cdot\text{sen}\ \frac{B}{2}\cdot\cos\frac{B}{2} + \text{sen}\ C$$

Agrupando en $\text{sen}\ C$

$$\text{sen}\ C\left(2\cdot\cos\frac{B}{2} - 1\right) = \text{sen}\ \frac{B}{2}\cdot\left(2\cdot\cos\frac{B}{2} - 1\right)$$

Como el triángulo es acutángulo $2\cdot\cos\frac{B}{2} - 1 \neq 0$ y por tanto

$$\boxed{\text{sen}\ C = \text{sen}\ \frac{B}{2}}$$

En un triángulo eso significa que $\sphericalangle B = 2\sphericalangle C$.

Recíprocamente esa condición sobre los ángulos también implica la igualdad de la suma de los segmentos del problema.

En efecto: $\sphericalangle B = 2\sphericalangle C$ implica que $BB_2 = B_2C$ y entonces $BB_2 + AB_2 = b$. De otra parte ya hemos calculado $AB + BA_2 = \frac{c(a+b+c)}{(b+c)}$.

Quitando denominadores, la expresión que va a ser una identidad es

$$c(a+b+c) = b(b+c) \Leftrightarrow b^2 - c^2 = ac \Leftrightarrow 2ab\cdot\cos C - a^2 = ac \Leftrightarrow \boxed{2b\cdot\cos C = a + c}.$$

Sean $c = sen\ C;\ b = sen\ B = sen\ 2C;\ a = sen\ (180 - 3C) = sen\ 3C.$

$$a + c = sen\ 3C + sen\ C = 2\cdot sen\ 2C\cdot\cos C = 2b\cdot\cos C$$

Por tanto es cierta la identidad.

Lo que se pide en el problema es ahora inmediato, pues si los ángulos de un triángulo son C, $B = 2C$ y $A = 180 - 3C$, cuando $2C = 80$, entonces $A = 60$ y recíprocamente.■