

Problema 765.

Calculeu i dibuixeu un triangle qualsevol $\triangle ABC$ coneguts el seu perímetre, l'àrea i l'angle A .

Sánchez, J. (2016): Comunicació personal.

Solució:

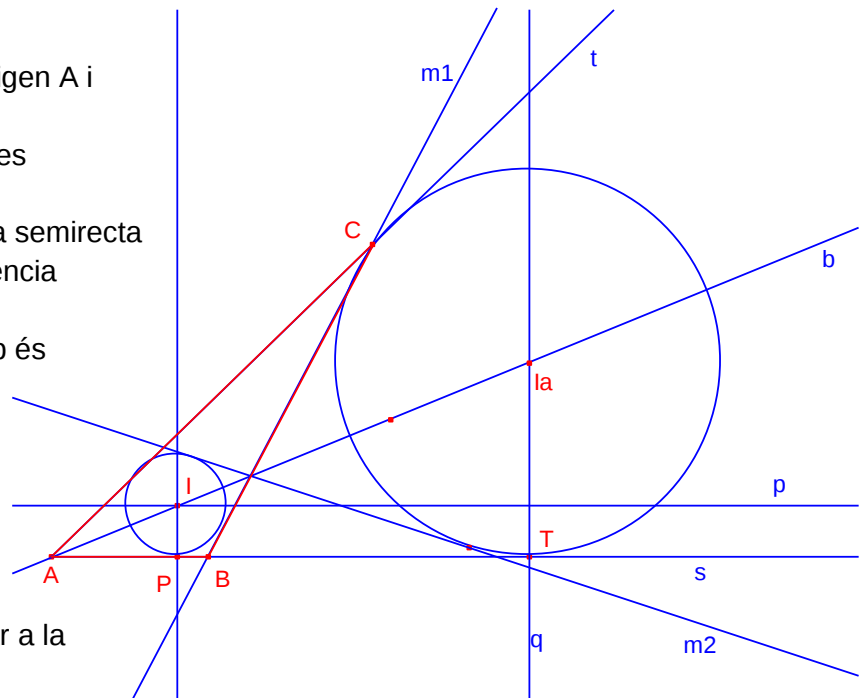
Siga $a + b + c = 2p$ el semiperímetre. Siga r el radi de la circumferència inscrita.

Siga S l'àrea del triangle. $S = pr$.

Aleshores, el problema és equivalent a construir el triangle coneguts p, r, A

Passos construcció:

- Dibuixar les semirectes s, t d'origen A i angle A .
 - Dibuixar la bisectriu b de les dues semirectes.
 - Dibuixar la recta p paral·lela a la semirecta s a una distància r (radi circumferència inscrita).
 - La intersecció de les rectes b i p és l' incentre I .
 - Dibuixar la circumferència inscrita al triangle.
 - Sobre la semirecta s dibuixar el segment $\overline{AT} = p$ semiperímetre.
 - Dibuixar la recta q perpendicular a la semirecta s que passa per T .
 - La intersecció de les rectes q i b és l'exincentre I_a .
 - Dibuixar la circumferència exinscrita al triangle.
 - Dibuixar les tangents interiors a les circumferències inscrita i exinscrita (costat $\overline{BC}$)
- Notem que els dos triangles construïts són iguals.



Solució analítica:

$$S = pr \quad r = \frac{S}{p} \quad S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A.$$

$$\text{Aleshores, } bc = \frac{2S}{\sin A} \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{2r}{b+c-a}.$$

$$-a + b + c = \frac{2r}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} \quad (2)$$

$$a + b + c = 2p \quad (3)$$

Sumant les expressions (2) (3):

$$b + c = \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} + p \quad (4)$$

La solució del problema consisteix en resoldre el sistema format per les equacions (1)

(4) (3):

$$\left\{ \begin{array}{l} b + c = \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} + p \\ bc = \frac{2pr}{\sin A} \\ a + b + c = 2p \end{array} \right. .$$