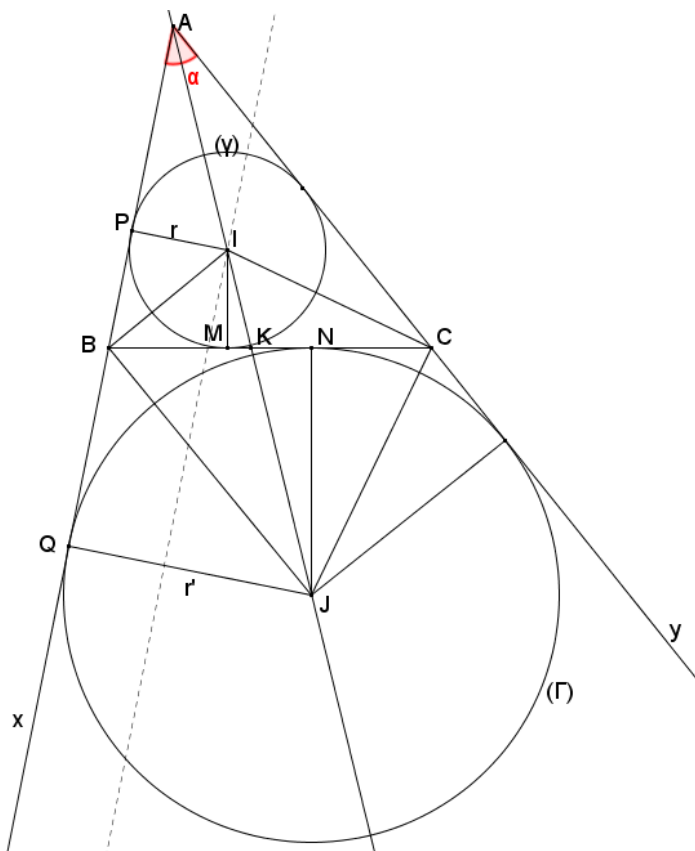


Problema 765

Calcular y dibujar un triángulo cualquiera (abc) conocidos solamente su perímetro, área y el ángulo A.

Sánchez, J. (2016): Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Soit un triangle ABC dont l'angle en A vaut α , le périmètre est égal à p et l'aire est égale à S.

On désigne par a,b,c les longueurs des côtés BC,CA et AB, par r le rayon du cercle inscrit (γ) et par r' le rayon du cercle exinscrit (Γ) dans le secteur de l'angle en A.

On a $p = a + b + c$.

Soient :

M et P les points de contact du cercle (γ) avec les côtés BC et AB,

N et Q les points de contact du cercle (Γ) avec BC et la droite qui porte le côté AB.

On sait que les points M et N sont symétriques par rapport au milieu du côté BC.

Il en résulte que $BM = CN$ et $AQ = AP + PB + BQ = AP + BM + CM = p/2$

Par ailleurs on a la deuxième relation $r \cdot p = 2S$

Connaissant α , p et S, la construction du triangle ABC se fait de la manière suivante:

- 1) On trace deux droites Ax et Ay qui font un angle α puis la bissectrice intérieure (Δ) de l'angle α .
- 2) On calcule $r = 2S/p$
- 3) On trace la parallèle à la droite Ax à une distance r. Elle coupe la bissectrice (Δ) au point I centre du cercle inscrit (γ). On trace (γ)
- 4) Sur la droite (Ax) on trace le point Q tel que $AQ = p/2$. La perpendiculaire en Q à la droite (Ax) coupe (Δ) au point J centre du cercle exinscrit (Γ) dans le secteur de l'angle en A. JQ donne le rayon r' de ce cercle. On trace (Γ).
- 5) On trace le point K sur le segment IJ tel que $KI/KJ = r/r'$ par application du théorème de Thalès.
- 6) On trace la tangente passant par K commune aux deux cercles (γ) et (Γ) qui coupe respectivement la droite (Ax) en B et la droite (Ay) en C.

Le triangle ABC est ainsi tracé et les côtés a,b et c peuvent être calculés à partir de α , p et S.

Par exemple on calcule AB de la manière suivante à partir de la relation $AB = c = AP + PB$.

On a $AP = r \cdot \cotan(\alpha/2)$ puis $PQ = AQ - AP = p/2 - r \cdot \cotan(\alpha/2)$. D'où $IJ = PQ/\cos(\alpha/2) = p/(2\cos(\alpha/2)) - r/\sin(\alpha/2)$.

Comme $r = 2S/p$ et $r' = AQ \cdot \tan(\alpha/2) = p \cdot \tan(\alpha/2)/2$, on déduit $IK = r \cdot IJ/(r+r')$.

D'où l'angle $IKM = \theta$ tel que $\sin(\theta) = IM/IK$ et l'angle $ABC = \beta$ tel que $\beta = 180^\circ - \alpha/2 - \theta$ et $BP = BM = IM \cdot \tan(\beta/2) = r \cdot \tan(\beta/2)$.