<u>Problema 765.-</u>

Calcular y dibujar un triángulo cualquiera (abc) conocidos solamente su perímetro, área y el ángulo A.

Sánchez, J. (2016): Comunicación personal.

Juan Antonio Villegas Recio, alumno de 2º Bach del IES Blas Infante (Córdoba)

Solución.-

1) **Su área S.**
2) **Su Perímetro 2P.**
3) **El ángulo Â**

Sea un triángulo ABC del cual conocemos su área, su perímetro y su ángulo Â.

Conocemos a su vez que:

$$S = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot sen\,(\hat{A})\,;\ \frac{2S}{Sen\,(\hat{A})} = cb$$

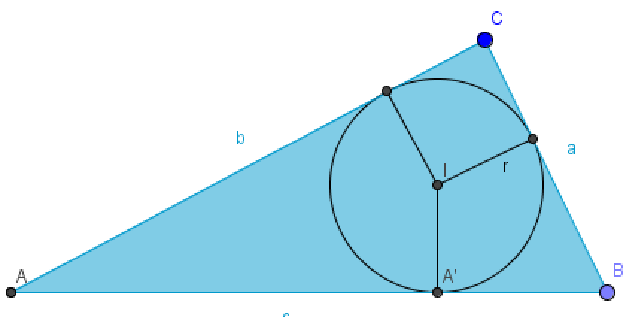
Es decir, conocemos el producto cb. Por otra parte:

$$2P = a + b + c\,;\ b + c = 2P - a$$

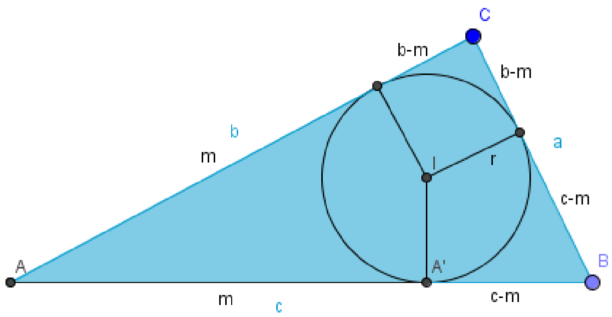
Si conociésemos b+c, podríamos calcular el valor de ambas planteandolo como una ecuación de segundo grado.

Así, la prioridad es hallar el valor de a en función de los parámetros conocidos.

Para ello ultilizamos la expresión: $S = P \cdot r$, donde r es el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo.



Con este esquema, si le llamamos m a la distancia AA':



Buscamos 'a'.

Sabemos que

$$b - m + c - m = a$$

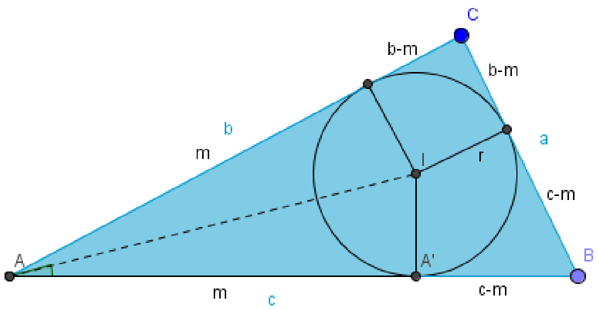
$$b + c = a + 2m$$

Combinándolo con $b + c = 2P - a$

$$a + 2m = 2P - a$$

$$2a = 2P - 2m\,; a = P - m$$

Sabiendo esto, la prioridad pasa a ser 'm'. Para hallarla, recurrimos al triángulo rectángulo AIA', en el que sabemos que uno de sus ángulos vale Â/2.



Sabiendo esto: $tg\frac{\hat{A}}{2} = \frac{r}{m}\,; m = \frac{r}{tg\,\frac{\hat{A}}{2}}$

Llegados a este punto, necesitamos conocer r, valor que encontrábamos previamente en $S = P \cdot r$

Conociendo S y P, conocemos r.

$$r = \frac{S}{P}$$

Ahora basta con sustituir valores:

$$m = \frac{\frac{S}{P}}{tg\,\frac{\hat{A}}{2}}\,; a = P - \frac{\frac{S}{P}}{tg\,\frac{\hat{A}}{2}}$$

Como $b + c = 2P - a$

$$b+c=2P-P+\frac{\frac{S}{P}}{tg\,\frac{\hat{A}}{2}}=P+\frac{S}{P\cdot tg\,\frac{\hat{A}}{2}}$$

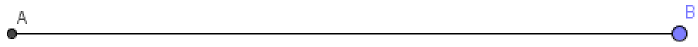
Sabiendo que: $b+c=P+\frac{S}{P\cdot tg\frac{\hat{A}}{2}}$ y $bc=\frac{2S}{Sen\ (\hat{A})}$

Entonces b y c serán las soluciones a la siguiente ecuación:

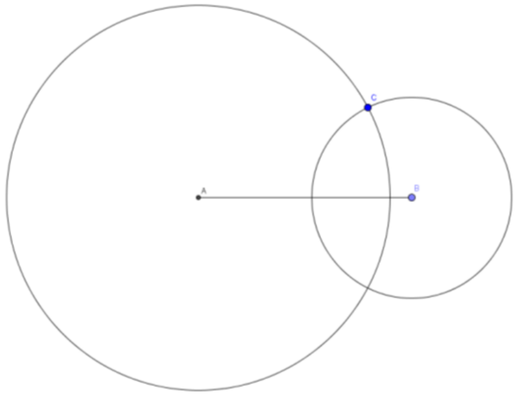
$$x^2-\left(P+\frac{S}{P\cdot tg\frac{\hat{A}}{2}}\right)x+\frac{2S}{Sen\ (\hat{A})}=0$$

Para construirlo se sustituyen los valores conocidos en las fórmulas que determinan a, b y c. Una vez que tenemos los valores de los lados:

1. Se traza un segmento de valor uno de los lados (P.ej.: c)



2. Se realizan circunferencias con centros en A y B y radios la medida de los lados. La intersección de estas circunferencias nos resultará C (dos soluciones posibles):



Teniendo los vértices se unen los lados.