Pr. Cabri 766

Enunciado

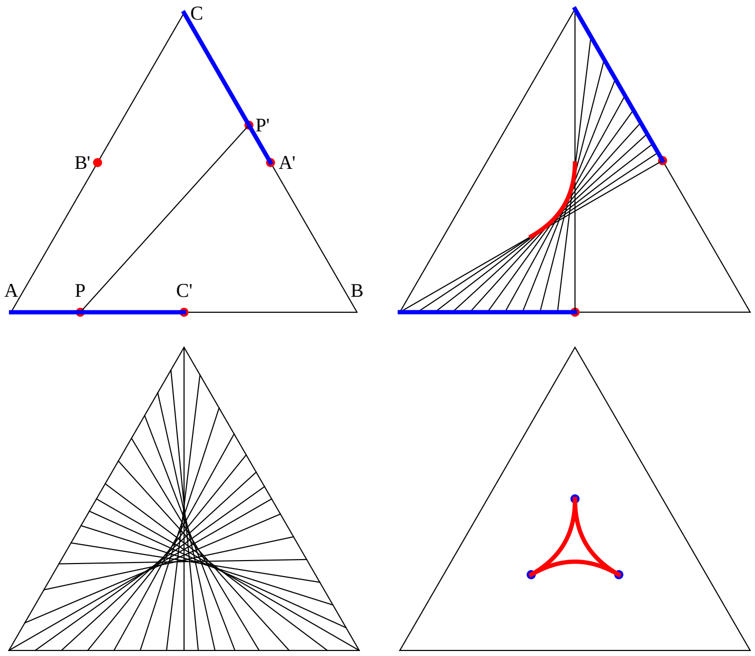
¿Cuál es la envolvente de las rectas que bisecan a un triángulo?

Solución de César Beade Franco

Como las transformaciones afines conservan rectas, tangencias y razones entre áreas, es suficiente construirla para un triángulo cualquiera.

Consideremos el triángulo equilátero de vértices A(0,0), B(2,0) y C(1,$\sqrt{3}$) y tomemos un punto P(p,0) sobre la recta AB y calculemos la recta que pasando por P biseca al triángulo. Corta al lado BC en un punto P'(t,(2-t)$\sqrt{3}$). Como el área de PBP' es la mitad de ABC, podemos expresar t en función de p y resulta $P' = \left(\frac{-3+2p}{-2+p}, \frac{\sqrt{3}}{2-p}\right)$.

Dibujo 1

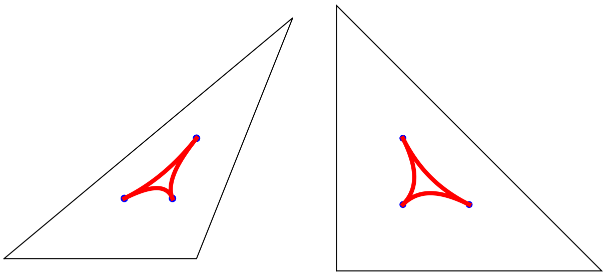


Si P recorre AC', P' recorre A'C. En este recorrido la recta (segmento) PP' "envolverá" cierta curva -una parte de la misma- que calcularemos. Simétricamente si P recorre BA', P' se desplaza por B'A y por C'B si lo hace de C a B'.El dibujo 1 lo aclara.

La recta PP' tiene como ecuación $r(p) = \sqrt{3}\, p - \sqrt{3}\, x + 3\, y - 4\, p\, y + p^2\, y = 0$.
Derivando respecto a p, $\partial_p r(p)) = \sqrt{3} + 2\,(-2 + p) = 0$ y eliminando p entre ambas ecuaciones obtenemos
$-3\sqrt{3} + 24\, y - 12\, x\, y - 4\sqrt{3}\, y^2 = 0$, ecuación de una hipérbola.
Cada lado aporta una hipérbola como se obseva en el dibujo.
Realmente la envolvente consta de tres ramas de hipérbola que se tocan en los puntos $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ y $(\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$.

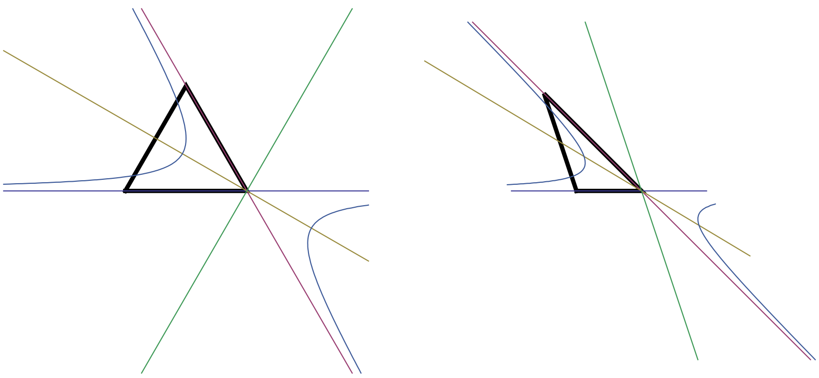
Una transformación afín nos permite obtener la envolvente de cualquier triángulo

Dibujo 2



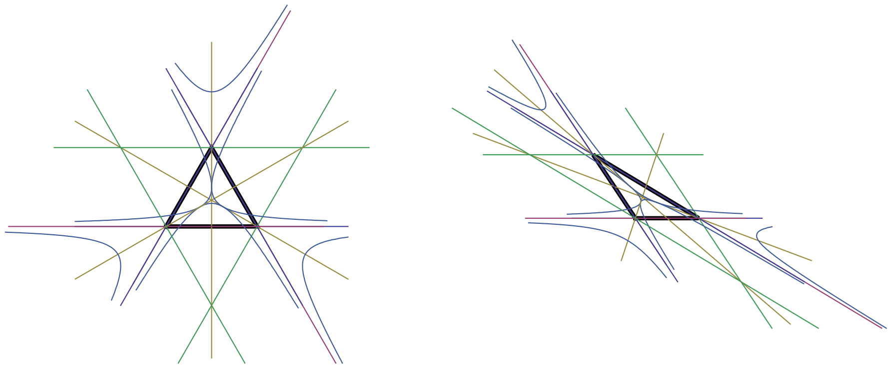
Analicemos la hipérbola globalmente, considerada como la envolvete de las rectas que determinan un triángulo PBP' de área la mitad de ABC, pero que la mayoría no lo bisecan en sentido propio.

Dibujo 3



La recta PP' une puntos de los lados AB y BC. Observamos que la hipérbola tiene como centro el vértice B y esos lados como asíntotas. Los ejes son el otro lado y la mediana desde B, lo que puede obtenerse también por cálculo directo. Y lo mismo sucede para las otras dos hipérbolas.

Dibujo 4



Apéndice

Observamos que al desplazar el punto P por el perímetro del triángulo, la recta bisecante lo "barre" de forma continua, de lo que podemos deducir una solución (¿infomal?) no constructiva del irresuelto problema 550.
Consideremos una figura interior al triángulo ABC, tal como su tiángulo de Morley u otra y un par de rectas r y s (bisecantes) de ABC que lo atraviesen. Como P puede recorrer ABC en dos sentidos, podemos desplazarnos de r a s de manera continua en dos formas lo que garantiza la transición de una región con área menor que la mitad a otra de área mayor que la mitad de forma continua. Por tanto habrá una posición intermedia de r que biseque la figura.