

Problema 768

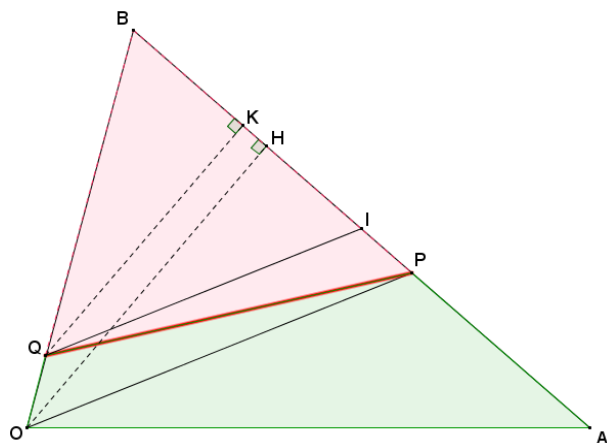
Propuesto por César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña

¿Cuál es la envolvente de las rectas que bisecan a un triángulo?

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

Réponse: l'enveloppe des droites qui partagent un triangle en deux polygones de même aire est constituée par **trois arcs hyperboliques**.

Construction préalable de la droite qui partage un triangle en deux parties de même aire



Soient P un point quelconque sur l'un des côtés du triangle OAB, distinct des trois sommets. et I le milieu du côté sur lequel est placé le point P. On trace du point I la parallèle à la droite OP qui coupe pour la première fois l'un des deux autres côtés du triangle au point Q. Voir figure-ci-contre.

Sans perte de généralité, le segment PQ délimite un triangle BPQ et un quadrilatère OAPQ.

Lemme: le triangle BPQ et le quadrilatère OAPQ ont même aire.

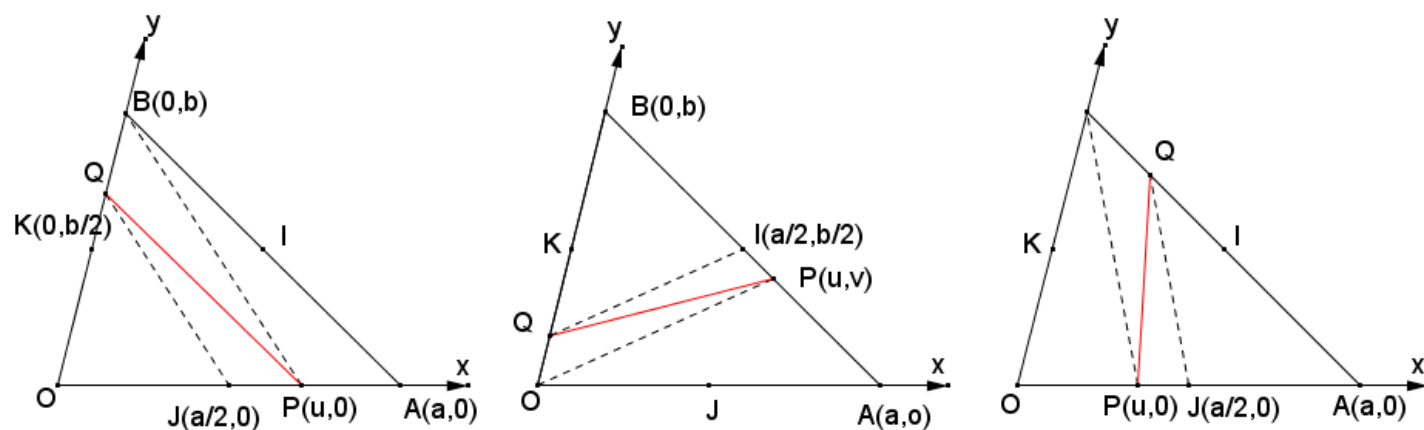
Démonstration:

Soient H et K les projections de O et de Q sur le côté AB.

D'après le théorème de Thalès, on a les relations $QK/OH = QB/OB = IB/PB = AB/2PB$

Donc $2\text{aire BPQ} = QK.PB = OH.AB/2 = \text{aire OAB}$. Cqfd

Détermination de l'enveloppe de PQ



On choisit pour repère les axes Ox et Oy qui sont portés par les côtés OA et OB.

Les coordonnées des sommets O,A,B et des milieux I,J,K des côtés AB,OA et OB sont respectivement. O:(0,0), A:(a,0), B:(0,B), I:(a/2,b/2), J:(a/2,0) et K:(0,b/2).

Le point courant P a pour coordonnées (u,v).

Trois cas sont à considérer (voir figure supra):

1er cas: P est sur l'intervalle AJ et le point Q est situé entre B et K

Le point courant est $P(u,0)$. On a les équations suivantes des droites:

$$BP : uy + bx = bu$$

$$JQ : 2uy + 2bx = ba$$

$$OB : x = 0$$

D'où les coordonnées de Q à l'intersection de la droite PQ et de l'axe OY :

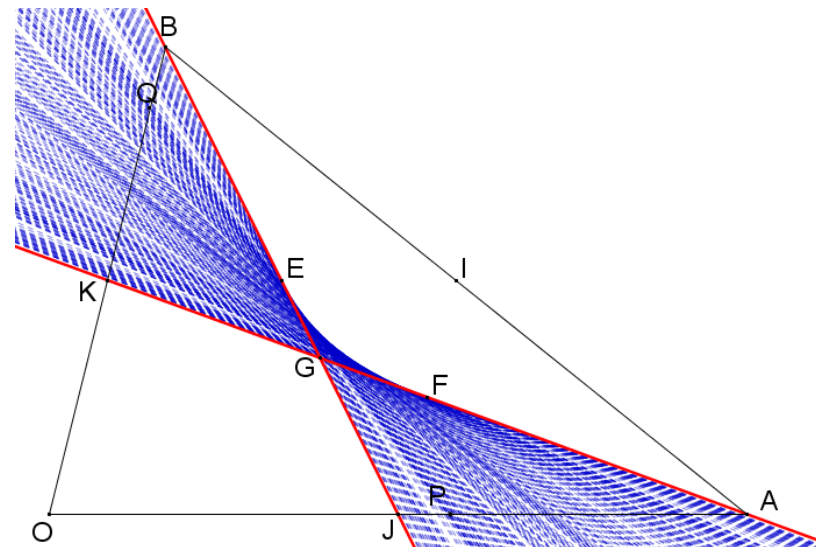
$$x = 0 \text{ et } y = ab/2u$$

et l'équation de la droite PQ : $F(x,y,u) = 2u^2y + abx - abu = 0$

Pour obtenir l'enveloppe de PQ, on annule la dérivée partielle de F par rapport à u.

$\partial F / \partial u = 4uy - ab = 0$. D'où $u = ab/4y$. Cette valeur de u portée dans $F(u,v,y)$ donne l'équation de l'enveloppe en $F(x,y)$ soit après simplification **$8xy - ab = 0$** qui est l'équation d'une hyperbole $\mathcal{H}_1$ admettant les axes Ox et Oy pour asymptotes.

Les médianes BJ et AK qui se coupent au centre de gravité G sont respectivement tangentes à $\mathcal{H}_1$ aux points E de coordonnées $(a/4, b/2)$ et F $(a/2, b/4)$. Lorsque P et Q parcourent respectivement le segment AJ et le segment KB, l'enveloppe de PQ se limite à **l'arc hyperbolique de $\mathcal{H}_1$ admettant E et F pour extrémités.**



2ème cas: P est sur l'intervalle AI et le point Q est situé entre O et K

Le point courant est $P(u,v)$. On a les équations suivantes des droites:

$$AB : ay + bx = ab$$

$$OP : uy - vx = 0$$

$$IQ : au(2y - b) = b(a - u)(2x - a)$$

D'où les coordonnées de Q à l'intersection de la droite IQ et de l'axe OY :

$$x = 0 \text{ et } y = b(2u - a)/2u$$

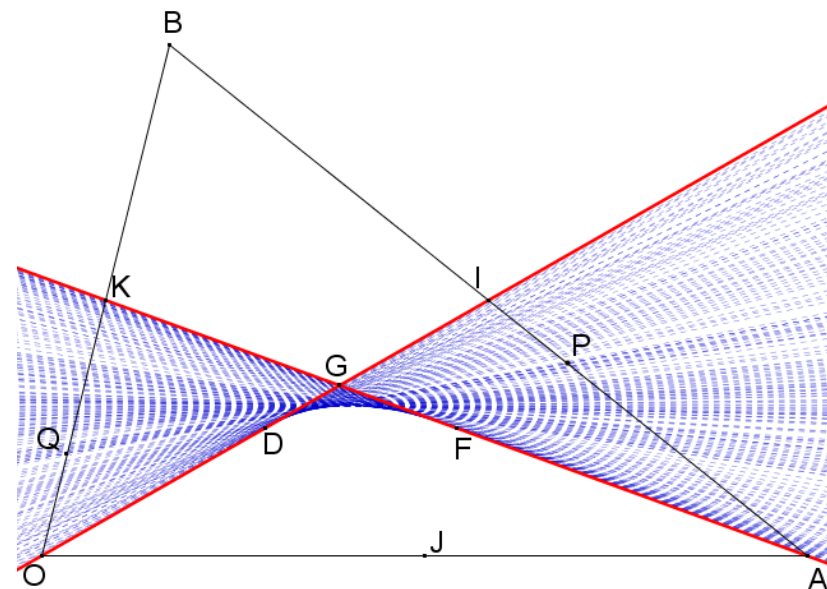
et l'équation de la droite PQ : $F(x,y,u) = 2au^2y + (2bu^2 - ab)x - abu(2u - a) = 0$

Pour obtenir l'enveloppe de PQ, on annule la dérivée partielle de F par rapport à u.

$\partial F / \partial u = 4(ay + bx - ab)u + a^2b = 0$. D'où $u = a^2b/4(ab - ay - bx)$. Cette valeur de u portée dans $F(u,v,y)$ donne l'équation de l'enveloppe en $F(x,y)$ soit après simplification :

$8(ab - ay - bx).x - a^2b = 0$ qui est l'équation d'une hyperbole $\mathcal{H}_2$ admettant l'axe Oy et la droite AB pour asymptotes.

Les médianes OI et AK sont respectivement tangentes à $\mathcal{H}_2$ aux points D de coordonnées $(a/4, b/4)$ et F $(a/2, b/4)$. Lorsque P et Q parcourent respectivement le segment AI et le segment OK, l'enveloppe de PQ se limite à **l'arc hyperbolique de $\mathcal{H}_2$ admettant D et F pour extrémités.**

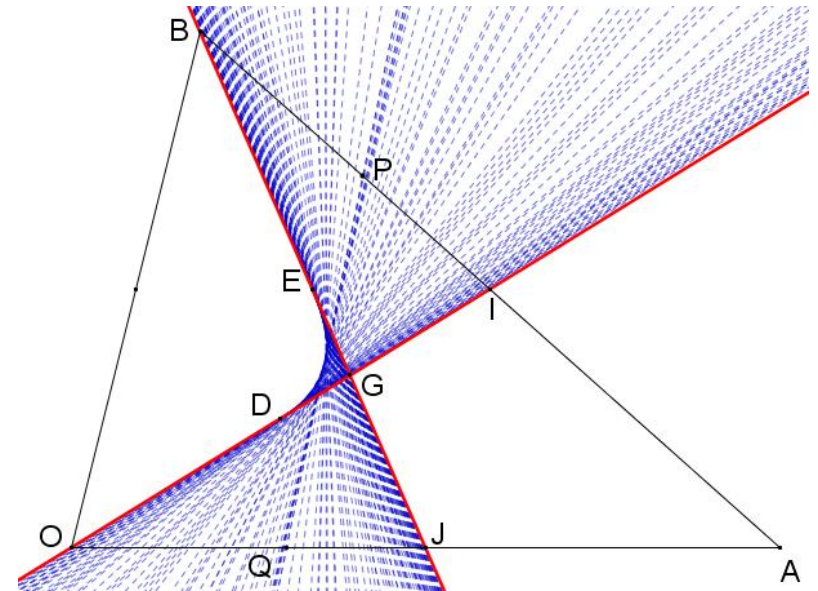


3ème cas: P est sur l'intervalle BI et le point Q est situé entre O et J

Un calcul en tous points similaire à celui du 2ème cas avec la permutation de x et de y puis celle de a et b donne l'équation de l'hyperbole $\mathcal{K}_3$ admettant l'axe Ox et la droite AB pour asymptotes : $8(ab - ay - bx).y - ab^2 = 0$.

Les médianes OI et BJ sont respectivement tangentes à $\mathcal{K}_3$ aux points D et E précédemment définis.

Lorsque P et Q parcourent respectivement le segment BI et le segment OJ, l'enveloppe de PQ se limite à l'arc hyperbolique de $\mathcal{K}_3$ admettant D et E pour extrémités.



Les trois arcs hyperboliques DE, EF et DF peuvent être représentés sur une même figure:

