

Problema 767.-

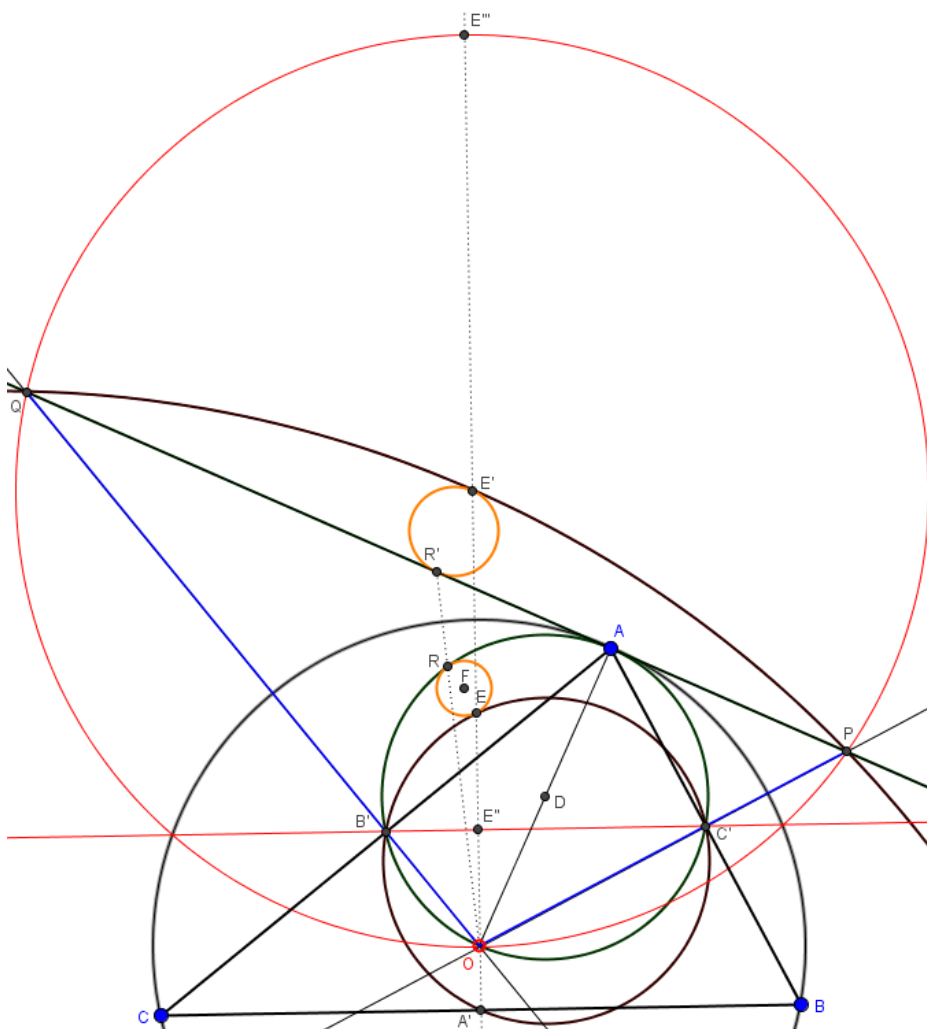
ABC es un triángulo no rectángulo en A. Sean Γ la circunferencia circunscrita y O el circuncentro. Sea Δ la recta tangente al círculo Γ por A. La recta Δ y las mediatrices de los lados AB y AC se cortan respectivamente en los puntos P y Q. Sea γ el círculo tangente internamente al círculo Γ_a de diámetro OA y tangente exteriormente al círculo de Euler Γ_e de ABC en la intersección de la mediatriz del lado BC con este círculo. Sea R el punto de contacto de los círculos γ y Γ_a . Demostrar que la recta OR es la mediana del triángulo OPQ.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Dem.-

Sea realizada la construcción siguiendo las pautas del enunciado. Considerando la **inversión** respecto de $\mathcal{L}$, circunferencia circunscrita al triángulo ABC, podemos observar que $\mathcal{L}_a$ (circunferencia) y Δ (recta) son objetos que se corresponden entre sí. La imagen de la circunferencia $\mathcal{L}_e$ sería otra circunferencia que tendría al segmento PQ como una cuerda.



Por tanto, la circunferencia γ , tangente a las anteriores, $\mathcal{L}_a$ y $\mathcal{L}_e$, deberá transformarse en la circunferencia que es tangente al arco de circunferencia $\widehat{PQ}$ y a su cuerda PQ.

Por otro lado, ambas circunferencias $\mathcal{L}_a$ y $\mathcal{L}_e$, al circunscribir a los triángulos $AB'C'$ y $A'B'C'$ de lados, la mitad de los lados del triángulo (ABC), tienen por radio, la mitad del radio de la circunferencia circunscrita $\mathcal{L}$.

Se pueden considerar ambas circunferencias, simétricas entre sí, respecto de la cuerda común $B'C'$. Este segmento $B'C'$ es perpendicular al segmento OE y el punto E'' , intersección entre ambos segmentos, será punto medio entre O y E.

Por la **inversión** de circunferencia $\mathcal{L}$, los puntos E y E'' se transforman en E' y E''' , respectivamente. Por tanto, el punto E'' se transformará en E''' , punto diametralmente opuesto

del polo O, pues en la inversión se conservan las distancias relativas entre los puntos y sus imágenes.

En definitiva, el punto E' es el circuncentro del triángulo OPQ, imagen por la inversión de la recta $B'C'$.

Al ser E' , circuncentro del triángulo OPQ, entonces E' estará sobre la mediatriz de la cuerda PQ y será el punto medio del arco $\widehat{PQ}$. Por tanto, el punto de tangencia R' sobre la cuerda PQ será su punto medio.

De este modo, OR será la mediana del triángulo OPQ.

cqd ■