

Problema 768.-

Dado un triángulo (abc) , demostrar que conocidas sus alturas h_b y h_c , la altura $h_a > \frac{h_b h_c}{h_b + h_c}$.

Sanchez. J. (2016) Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Dem.-

$$h_a > \frac{h_b h_c}{h_b + h_c} \leftrightarrow h_a > \frac{1}{\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}}.$$

Ahora bien, si S es el valor del área del triángulo (abc) , podemos expresar

$$S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c \rightarrow \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S}; \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S}; 2S = a h_a.$$

$$h_a > \frac{h_b h_c}{h_b + h_c} \leftrightarrow h_a > \frac{1}{\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}} \leftrightarrow h_a > \frac{1}{\frac{b}{2S} + \frac{c}{2S}} = \frac{2S}{b+c} = \frac{a h_a}{b+c}$$

$$h_a > \frac{h_b h_c}{h_b + h_c} \leftrightarrow h_a > \frac{a h_a}{b+c} \leftrightarrow \mathbf{b + c > a} \text{ (Desigualdad triangular)}$$