

Problema 768

Dado un triángulo (abc), demostrar que conocidas sus alturas h_b y h_c , la altura $h_a > h_b \cdot h_c / (h_b + h_c)$.

Sanchez. J. (2016) Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

On désigne par a, b et c les dimensions des côtés BC, CA et AB du triangle ABC et l'on sait que pour tout triangle ABC non dégénéré on a l'inégalité $b + c > a$.

On a la formule du double de l'aire du triangle ABC: $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$.

On en déduit $b = a \cdot h_a / h_b$ et $c = a \cdot h_a / h_c$.

D'où l'inégalité $b + c = a \cdot h_a (1/h_b + 1/h_c) > a$, ce qui donne $h_a > h_b \cdot h_c / (h_b + h_c)$ qui est l'inégalité demandée.