Problema 769.-

OAB es un triángulo con <AOB = 90° y altura OH. P es un punto en la circunferencia con centro A y radio AO. La bisectriz del ángulo BPH se encuentra con la recta AB en Q.

Hallar el lugar geométrico de V, punto medio del segmento PQ al variar P sobre la circunferencia dada.

Fondanaiche, P. (2016): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Una vez realizada la construcción indicada en el enunciado, se destacan los siguiente hechos geométricos:

1.- El ángulo $\angle OAB = \angle HOB = \alpha$, ya que $OH \perp AB$; $OB \perp AO$.

2.- En la circunferencia Γ_1, de centro A y radio AO, el ángulo $\angle O'OB = \angle HOB = \alpha$ es semiinscrito, siendo O'el punto donde la altura OH encuentra a dicha circunferencia Γ_1.

3.- Sean Q y Q', los pies de las bisecrices interiores y exterior, respectivamente del ángulo $\angle HOB = \alpha$ en el triángulo OHB. Como $OH \perp HQ'$; $OQ \perp OQ'$, el ángulo $\angle OQ'Q = \angle HOQ = \frac{\alpha}{2}$. Por tanto, al ser $\angle OQ'Q = \frac{\alpha}{2} \rightarrow$ El punto Q' es el punto diametralmete opuesto al punto Q en la circunferencia Γ_1.

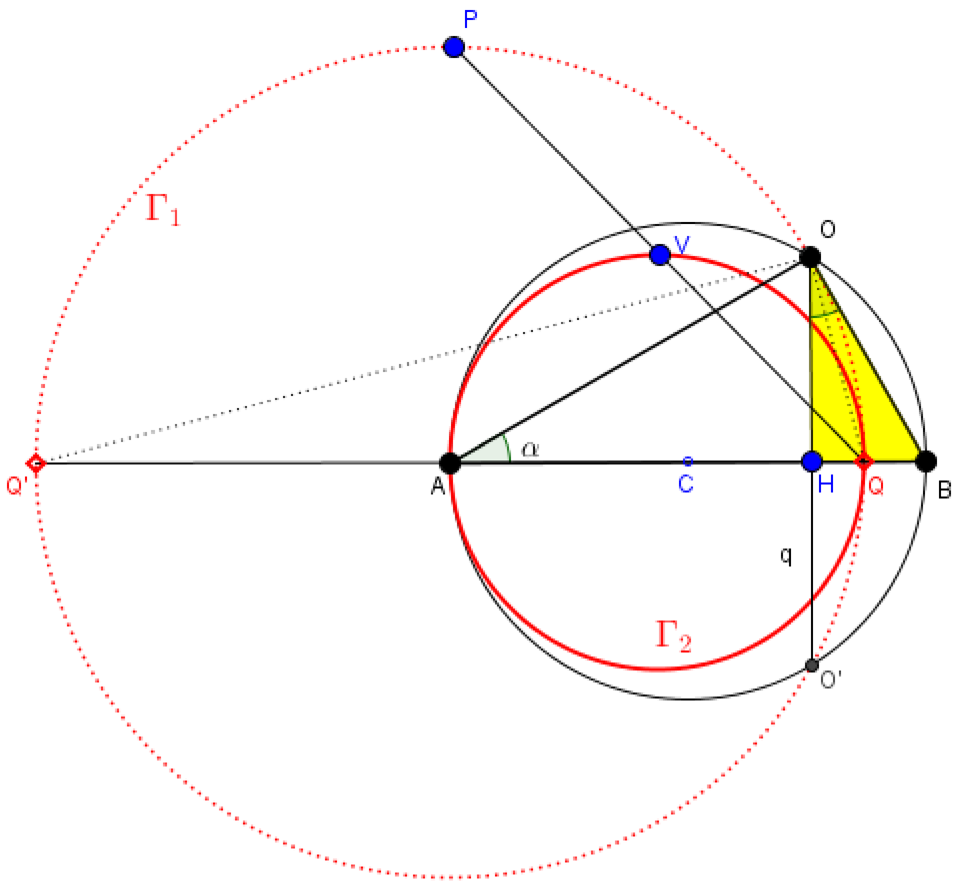
4.- Por tanto, la circunferencia de diámetro QQ' es la que se denomina de Apolonio. Esta circunferencia verifica además ser el Lugar geométrico de los puntos P del plano que $\frac{PH}{PB} = \frac{OH}{OB} = (CTE)$.

A ella también pertenecen los puntos P para los cuales, el segmento PQ es la bisectriz del ángulo $\angle BPH$.

Ver con mayor detalle en este misma Revista, el Problema 18:

http://www.aloj.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol18sat.htm

5.- La homotecia de centro el punto Q y de razón $\frac{1}{2}$, transforma un punto P de Γ_1 en el punto V, punto medio del segmento PQ.



Al variar P sobre la circunferencia Γ_1, V recorrerá Γ_2, circunferencia de diámetro AQ.