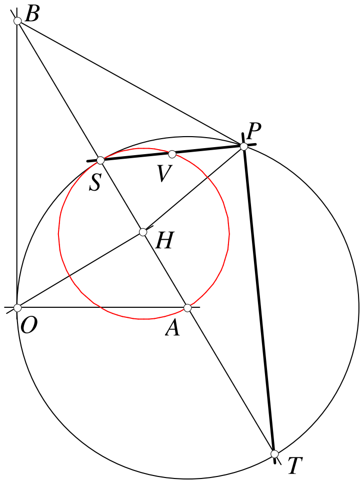
**Problema 769 de *triánguloscabri*.** *$OAB$ es un triángulo rectángulo con $\angle AOB = 90°$ y altura $OH$. $P$ es un punto en la circunferencia con centro $A$ y radio $AO$. La bisectriz del ángulo $BPH$ se encuentra con la recta $AB$ en $Q$. Determinar el lugar geometrico del punto medio $V$ del segmento $PQ$ al variar $P$ sobre la circunferencia dada.*

Propuesto por Philippe Fondanaiche.

*Solución de Francisco Javier García Capitán.* Vamos a asignar coordenadas cartesianas de forma que $A = (0, 0)$ y $O = (-1, 0)$. La recta $BA$ corta a la circunferencia $(A, AO)$, es decir la circunferencia unidad, en dos puntos antípodas $S$ y $T$.




Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $B$, $S$ y $T$ tienen coordenadas

$$B = (-1, \tan\beta), \quad S = (-\cos\beta, \operatorname{sen}\beta), \quad T = (\cos\beta, -\operatorname{sen}\beta).$$

Entonces podemos calcular

$$H = (-\cos^2\beta, \operatorname{sen}\beta\cos\beta).$$

Ahora, si $P = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ es un punto cualquiera de la circunferencia $(A, AO)$, podemos calcular el punto simétrico $B'$ de $B$ respecto de $PS$, obteniendo

$$B' = \left(\cos\alpha - \cos\beta - \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}, \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\beta}\right),$$

Podemos comprobar que $B'$, $P$ y $H$ siempre están alineados, por lo que también siempre tendremos que $PS$ es una bisectriz del ángulo $BPH$, y tendremos que $Q = S$.

Como $S$ es fijo, el punto medio $V$ de $PS$ describe la circunferencia de diámetro $SA$.