

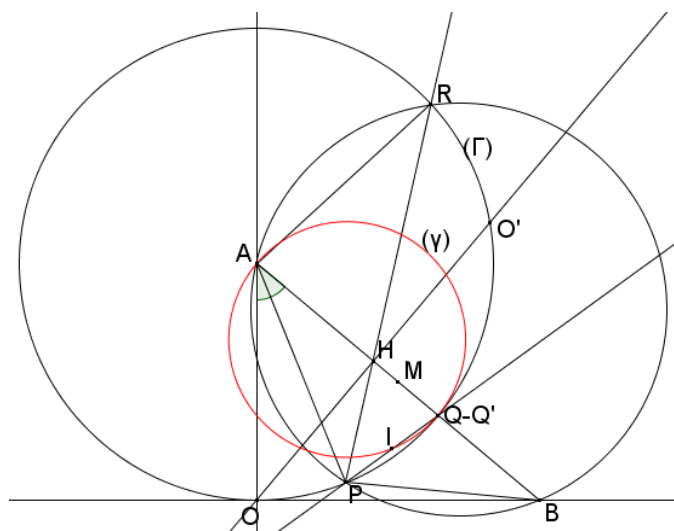
Problema 769

OAB es un triángulo con $\angle AOB = 90^\circ$ y altura OH.

P es un punto en la circunferencia con centro A y radio AO.

La bisectriz del ángulo BPH se encuentra con la recta AB en Q

Determinar el lugar geométrico del punto V medio del segmento PQ al variar P sobre la circunferencia dada.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

Lemme: la bissectrice de l'angle $\angle BPH$ passe par le point fixe Q à l'intersection du cercle (Γ) avec l'hypoténuse AB.

Démonstration: on trace le point O' symétrique de O par rapport à H, puis le point Q' à l'intersection de (Γ) avec AB et enfin le point R qui est le deuxième point d'intersection de la droite PH avec (Γ) .

O' est sur le cercle (Γ) .

On a les relations $HP \cdot HR = HO \cdot HO' = HO^2$. Comme le triangle rectangle AOB a pour hauteur OH, on a $OH^2 = AH \cdot HB$, ce qui entraîne $HP \cdot HR = HA \cdot HB$.

Les quatre points A, P, B et R sont cocycliques.

Donc $\angle BPH = \angle BPR = \angle BAR = \angle Q'AR = 2 \angle Q'PR$.

Il en résulte que $\angle Q'PR = \angle BPH/2$. Le point Q' est donc confondu avec le point Q.

Le lieu de I est alors le cercle (γ) homothétique de (Γ) par l'homothétie de centre Q et de rapport $1/2$. Le cercle (γ) a pour diamètre AQ et il est parcouru en totalité quand P décrit tout le cercle (Γ) .