

Problema 770.-

Dado un triángulo ABC, sean I su incentro y D y E, los pies de las bisectrices interiores de los vértices B y C. Sea IJ la bisectriz interior de DIE y sea IK la bisectriz interior de BIC. Es $\angle A = 60^\circ$ si y sólo si $IK = 2 IJ$.

Seimiya, T: *Crux Mathematicorum*.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

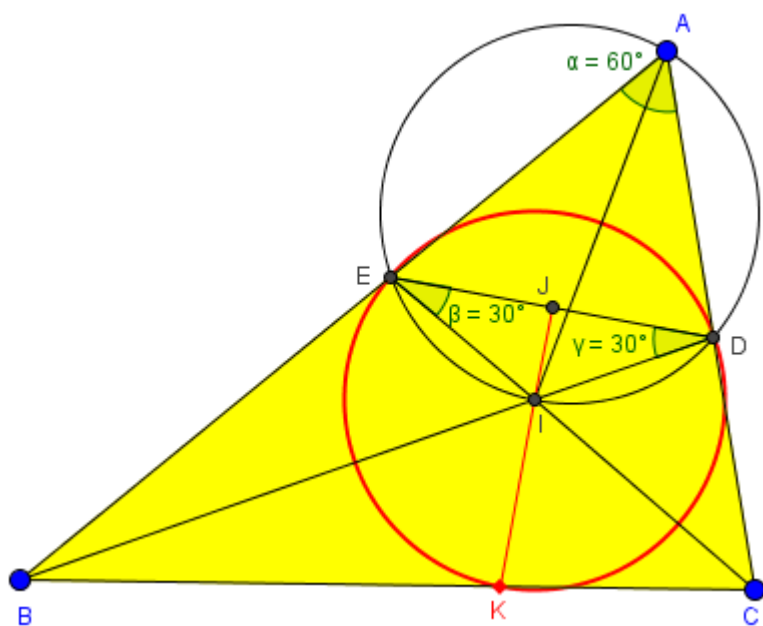
$\Rightarrow \angle A = 60^\circ$

Si $\angle A = 60^\circ$ entonces los puntos ADEI son concíclicos ya que:

$$\angle IEA = 120^\circ - \frac{1}{2}\angle C \text{ y } \angle IDA = 120^\circ - \frac{1}{2}\angle B.$$

Por tanto, $\angle IEA + \angle IDA = 180^\circ$. De esta forma, $\angle DIE = 120^\circ$.

También deducimos que $IE = ID$. Y además, $IJ = \frac{1}{2}ID = \frac{1}{2}IE$, ya que los triángulos IJD y IJE son de ángulos $30^\circ, 60^\circ$ y 90° .



Al examinar los triángulos BEI y BIK, observamos que tienen dos ángulos iguales 60° y $\frac{1}{2}\angle B$, y un lado común, IB. Por tanto, $IK = IE = ID$.

En definitiva, $IJ = \frac{1}{2}IK$. *cqd* ■