

Problema 770.

Donat un triangle $\triangle ABC$, siguin I el seu incentre i D i E els peus de les bisectrius interiors dels vèrtexs B i C ,

Siga $\overline{IJ}$ la bisectriu interior de $\angle DIE$ i siga $\overline{IK}$ la bisectriu interior de $\angle BIC$.

$A = 60^\circ$ si i només si $\overline{IK} = 2 \cdot \overline{IJ}$.

Solució Ricard Peiró i Estruch:

($\Rightarrow$)

Suposem $A = 60^\circ$.

$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2} = 120^\circ.$$

$$\angle DIE = \angle BIC = 120^\circ.$$

Aleshores, el quadrilàter $ADIE$ és inscripcible.

$$\angle EAI = \angle DAI = 30^\circ.$$

$$\angle EDI = \angle EAI = 30^\circ, \angle DEI = \angle DAI = 30^\circ.$$

Aleshores, el triangle $\triangle DEI$ és isòsceles.

$\overline{IJ}$ és bisectriu i per tant, altura sobre el costat desigual del triangle isòsceles $\triangle DEI$.

En el triangle rectangle $\triangle EJI$. $\overline{EI} = \overline{DI} = 2 \cdot \overline{IJ}$.

$$\angle BIK = \frac{1}{2} \angle BIC = 60^\circ.$$

$\angle EIB = 180^\circ - \angle BIC = 60^\circ$. Aleshores, els triangles $\triangle BEI$, $\triangle BKI$ són iguals.

Aleshores, $\overline{EI} = \overline{IK}$. Per tant: $\overline{IK} = 2 \cdot \overline{IJ}$.

($\Leftarrow$)

Siga M el punt mig de $\overline{IK}$. $\overline{IJ} = \overline{IM}$.

Pel punt M tracem una paral·lela a $\overline{DE}$.

Siguin P , Q la intersecció de la recta anterior i les rectes bisectrius de C i B , respectivament.

$\angle QIM = \angle EIJ$. Aleshores, els triangles $\triangle IMQ$, $\triangle IJE$ són iguals.

Aleshores, $\overline{IQ} = \overline{IE}$.

Anàlogament, $\overline{IP} = \overline{ID}$.

$DEQP$, és un paral·lelogram, que té les diagonals iguals.

Aleshores, és un rectangle.

Per tant, $\overline{EI} = \overline{ID}$.

Aleshores, IK és mediatriu del segment $\overline{ED}$. El triangle $\triangle EDK$ és isòsceles.

I és el baricentre del triangle $\triangle EDK$.

La recta DI talla el segment $\overline{EK}$ el seu punt mig T . Aleshores, $\overline{BE} = \overline{BK}$.

$\overline{BI}$ mediatriu de $\overline{EK}$, aleshores, $\overline{DE} = \overline{DK}$.

Aleshores, el triangle $\triangle EDM$ és equilàter. $\angle DIE = 120^\circ = 90^\circ + \frac{A}{2}$. Aleshores, $A = 60^\circ$.

