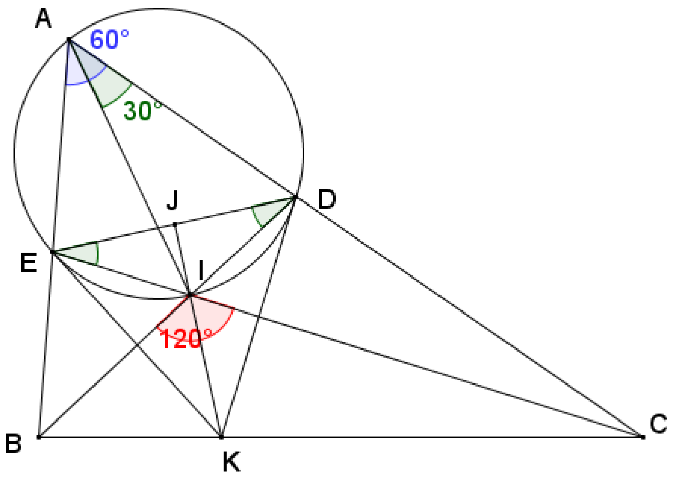
Problema 770
Dado un triángulo ABC, sean I su incentro, y D y E los pies de las bisectrices interiores de los vértices B y C.Sea IJ la bisectriz interior de DIE y sea IK la bisectriz interior de BIC.Es <A=60º si y sólo si IK= 2 IJ.
Seimiya, T: Crux Mathematicorum (sin especificar)

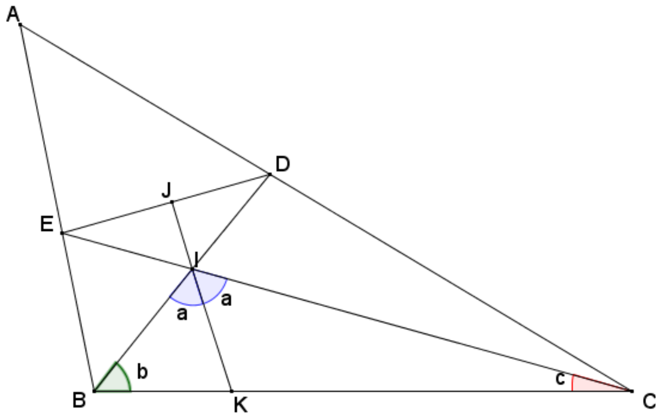
Solution proposée par Philippe Fondanaiche

1er cas ∠BAC = 60° ==> IK = 2IJ



Comme ∠IBC + ∠ICB = (∠ABC + ∠ACB)/2 = (180° – ∠BAC)/2 = 60°, il en résulte que ∠BIC = 120° = ∠DIE. Les quatre points A,D,I et E sont donc coycliques et ∠DEI = ∠DAI = ∠EAI = ∠EDI = 30°.
Le triangle IDE est isocèle de sommet I avec ID = IE et ∠DIJ = ∠EIJ = 60°.
Les triangles BIE et BIK sont isométriques car ils ont un côté commun et on a les égalités d'angles : ∠ABI = ∠CBI et ∠EIB = 180° – ∠EIJ – ∠KIB = 60° = ∠KIB.
On a donc IK = IE. Comme le triangle EIJ est un demi-triangle équilatéral, on a IJ = EI/2 = IK/2.
Cqfd

2ème cas IK = 2IJ ==> ∠BAC = 60°



On retient les notations suivantes : ∠BIK = ∠CIK = a, ∠CBI = b et ∠BCI = c.
IK étant la bissectrice de ∠BIC, on a 2a + b + c = 180°. D'où c = 180° – 2a – b.
Lemme: dans un triangle BIC dont on connaît les côtés BI et CI et l'angle ∠BIC = 2a, la bissectrice IK est égale à 2BI*CI.cos(a)/(BI + CI).
Démonstration:
La loi des sinus dans les triangles BIK et CIK donne les relations:
IK/sin(b) = BI/sin(a+b) et IK/sin(2a+b) = CI/sin(a+b)
D'où BI.sin(b) = CI.sin(2a+b) ==> tan(b) = CI.sin(2a)/(BI – CI.cos(2a))
Or IK = BI.sin(b)/sin(a+b) = BI.tan(b)/[sin(a)+cos(a).tan(b)]
D'où IK = BI.CI.sin(2a)/[sin(a).(BI – CI.cos(2a)+CI.cos(a)sin(2a)]
soit IK = BI.CI.sin(2a)/[BI.sin(a) + CI.(cos(a).sin(2a) – sin(a).cos(2a))]
Comme cos(a).sin(2a) – sin(a).cos(2a) = sin(2a – a) = sin(a) et que a > 0 on obtient après simplification:
IK = 2BI*CI.cos(a)/(BI + CI). (R_1)

Dans le triangle DEI, on a de la même manière **IJ = 2.DI.EI.cos(a)/(DI + EI). (R_2)**

Par ailleurs dans les triangles BEI et CDI, la loi des sinus donne les relations:**BI/EI = sin(2b + c)/sin(b) et CI/DI = sin(b + 2c)/sin(c). (R_3)**

La relation IK = 2IJ associée aux relations (R_1), (R_2) et(R_3) permet d'écrire:
IK = 2.BI.CIcos(a)/(BI + CI) = 2IJ = 4.DI.EI. cos(a)/(DI+EI)
D'où après simplification : 2(sin(b) + sin(c)) = sin(2b + c) + sin(b + 2c) qui peut s'écrire:
sin(2b).cos(c) + cos(2b).sin(c) + sin(b).cos(2c) + cos(b).sin(2c) = 2(sin(b) + sin(c))
Comme cos(2x) = 1 – 2sin²(x) et cos(2y) = 1 – 2sin²(y), l'expression ci-dessus devient :
(sin(b) + sin(c)).(2cos(b).cos(c) + 1 – 2sin(b).sin(c)) = 2(sin(b) + sin(c)).
Or sin(b) + sin(c) > 0, on peut diviser les deux membres par sin(b) + sin(c) et l'on obtient cos(b).cos(c) – sin(b).cos(c) = cos(b + c) = 1/2.
D'où b + c = 60° et ∠**BAC = 180° - 2(b + c) = 60°.** Cqfd