Pr. Cabri 771

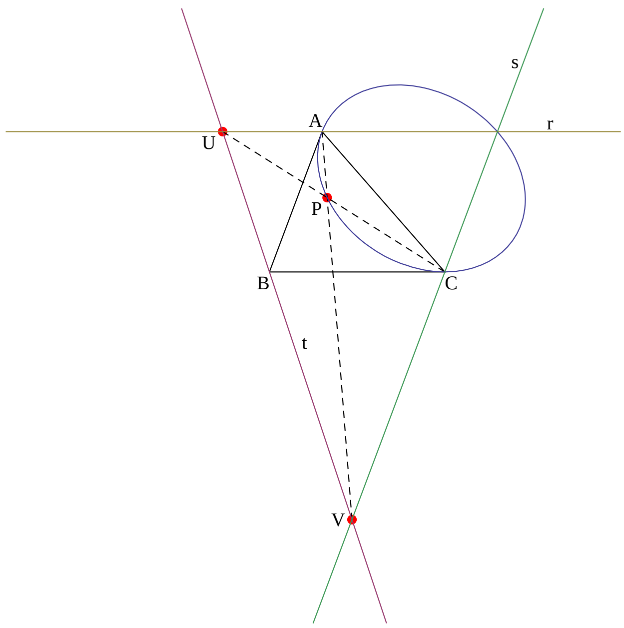
Enunciado

Dado un triángulo ABC, se traza por A una recta r paralela a BC.
Se traza por C una recta s paralela a BA.
Se considera una recta t variable que contenga a B.
La recta t cortará a r en U y a s en V.
Sea P el punto de intersección de VA con UC.
Hallar el lugar geométrico de P al variar t.

Soluciones de César Beade Franco

Primera solución

Consideremos el triángulo de vértices A(a,b), B(0,0) y C(1,0).
Así las rectas r y s tienen como ecuaciones $y = b$; $y = \frac{b}{a}(x-1)$ y la recta t, $y = mx$, con penidente m variable.
Es fácil deducir que $U = r \cap t = \left(\frac{b}{m}, b\right)$ y $V = s \cap t = \left(\frac{b}{b-am}, \frac{bm}{b-am}\right)$



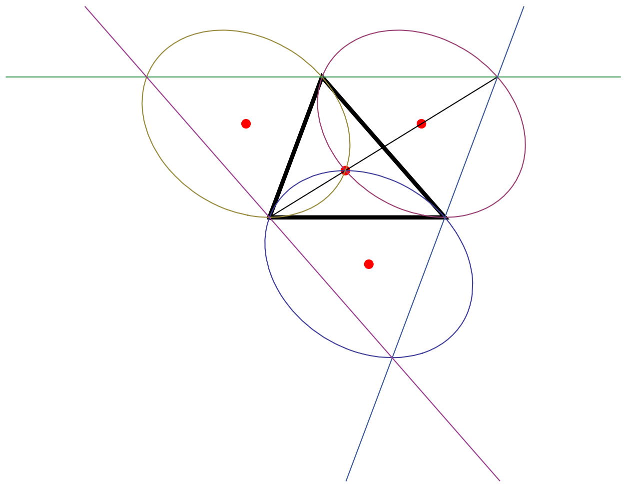
Y de aquí resulta que VA ⋂ UC = $\left(\frac{b^2-2\,a\,b\,m+a\,(1+a)\,m^2}{b^2+\left(1+a+a^2\right)\,m^2-b\,(m+2\,a\,m)},\ \frac{b\,m^2}{b^2+\left(1+a+a^2\right)\,m^2-b\,(m+2\,a\,m)}\right)$ que puede considerarse la ecuación paramétrica del lugar.

Eliminando m, se obtiene la cónica $b\left(b\,(-1+x)^2+(-2-2\,a\,(-1+x)+x)\,y\right)-\left(-1+a-a^2\right)y^2=0$.

Esta cónica tienen como invariante afín $\frac{3\,b^2}{4}>0$, es por tanto una elipse, que pasa por A ,C y B' = r ⋂ s. Además su centro es $\left(\frac{2\,(1+a)}{3},\ \frac{2\,b}{3}\right)$, el baricentro del triángulo ACB', es decir la elipse de Steiner de dicho triángulo (igual a la de ABC).

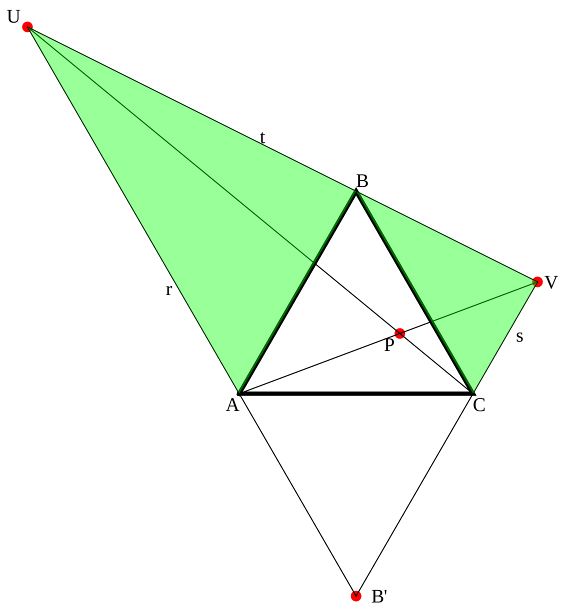
Si cambiamos de vértice obtendríamos otras dos elipses.

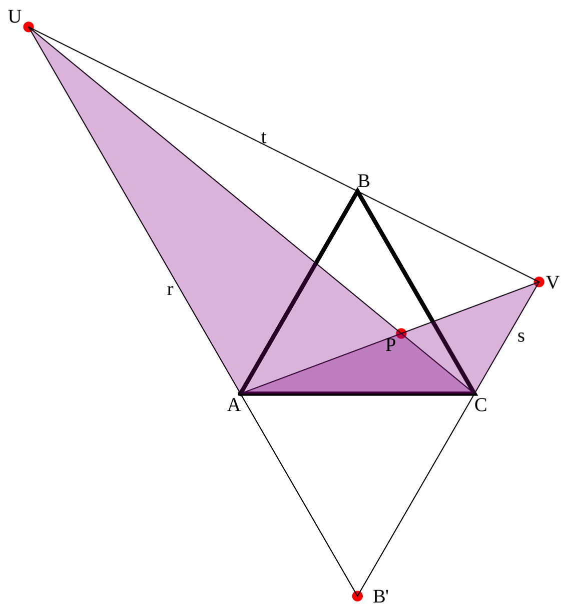
Estas tres elipses se cortan en el baricentro de ABC.



- **Segunda solución**

Consideremos un triángulo equilátero y observemos el siguiente dibujo





Los triángulos UBA y BVC son semejantes al tener los ángulos iguales, por tanto $\frac{VC}{CB} = \frac{BA}{AU}$.

Y también lo son CAU y VCA pues los ángulos en A y C son iguales (de 120º) y los lados que los limitan proporcionales, puesto que $\frac{VC}{CA(=CB)} = \frac{CA(=BA)}{AU}$.

Por tanto la suma de los ángulos UCA + VAC = UCA + AUC = 60º, lo que implica que el ángulo APC mide 120º y en consecuencia los puntos PAB'C son concíclicos al sumar los ángulos opuestos en P y B' 180º.

Así pues P describe el circuncírculo de ACB', siendo B' el punto de corte de r y s.

Siempre podemos transformar el triángulo ABC en otro cualquiera mediante una afinidad. En este caso la circunferencia circunscrita se convierte en la ex-elipse de Steiner del nuevo triángulo.