

### Problema 771

**Barroso, R. (2016): Comunicación personal**

Dado un triángulo ABC, se traza por A una recta r paralela a BC.

Se traza por C una recta s paralela a BA.

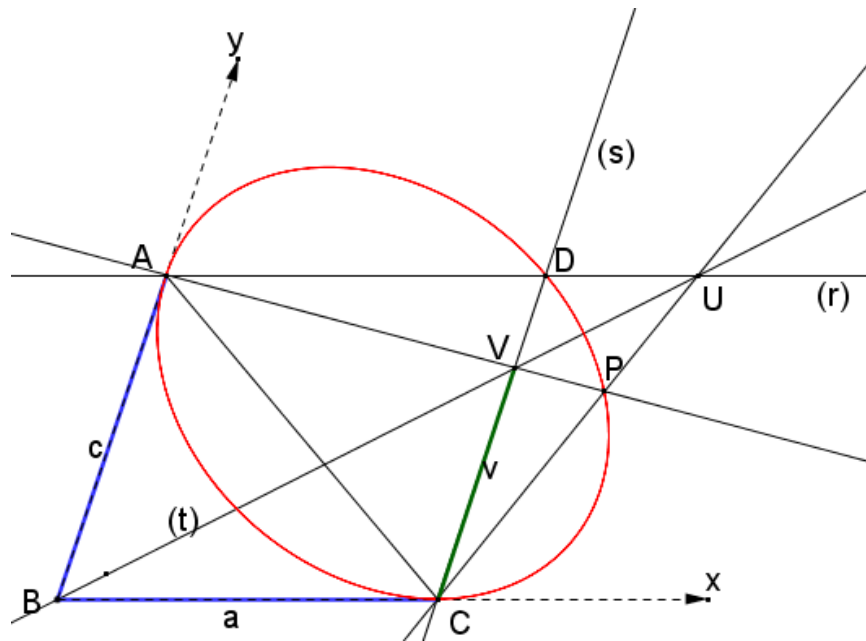
Se considera una recta t variable que contenga a B.

La recta t cortará a r en U y a s en V.

Sea P el punto de intersección de VA con UC.

Hallar el lugar geométrico de P al variar t.

### Solution proposée par Philippe Fondanaiche



On désigne par D le point d'intersection des droites r et s.

Dans un repère Oxy défini par les axes BCx et BAy, les coordonnées des points A, C, D et V sont respectivement:

A:(0,c), C:(a,0), D:(a,c) et V(a,v) avec v nombre réel quelconque.

On en déduit les coordonnées de U:(ac/v,c).

L'équation de la droite AV est :  $aY - (v - c)X + ac = 0$  (1)

Celle de la droite UC est :  $a(v - c)Y + cv(X - a) = 0$  (2)

Le point P est à l'intersection des droites AV et UC. Quand la droite (t) pivote autour du point B, le lieu de ce point s'obtient en éliminant le paramètre v dans les deux équations (1) et (2).

On obtient aisément  $v = -a^2Y(Y - c) / cX(X - c)$  que l'on porte dans l'équation (1)..

D'où l'équation du lieu de P :

$$a^2Y^2 + acXY + c^2X^2 - 2ac(aY + cX) + a^2c^2 = 0$$

C'est une **ellipse** passant par les points A, C et D et qui admet les côtés BA et BC pour tangentes aux points A et C.