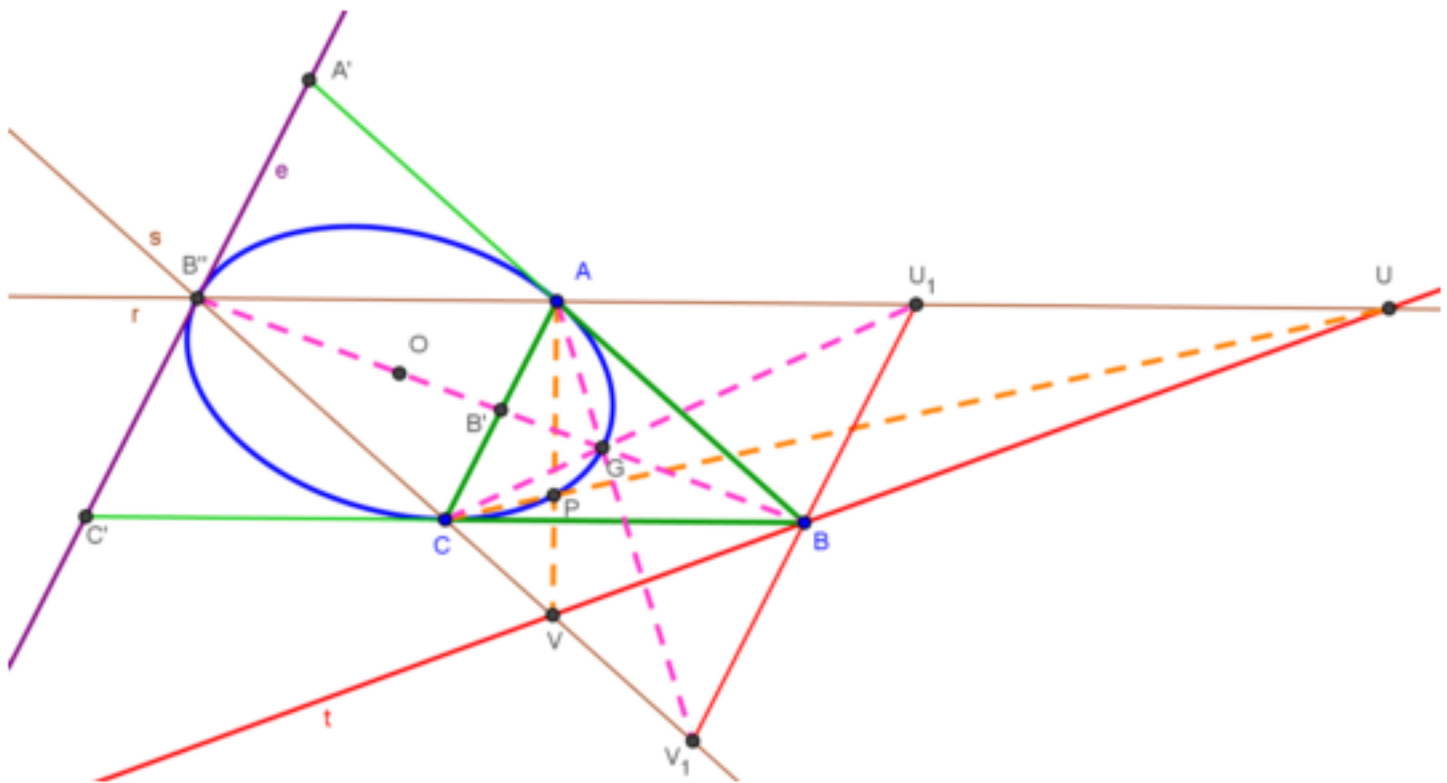


Problema 771.- Dado un triángulo ABC , se traza por A una recta r paralela a BC . Se traza por C una recta s paralela a BA . Se considera una recta t variable que contenga a B . La recta t cortará a r en U y a s en V . Sea P el punto de intersección de VA con UC .

Hallar el lugar geométrico de P al variar t .

Barroso, R (2016): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Solución sintética

La correspondencia entre las rectas r y s es una proyectividad π_B : consiste en proyectar una recta sobre la otra a través de B . Si llamamos B'' al punto común ambas; A_∞, C_∞ a los puntos del infinito de r y s respectivamente, se corresponden en ella

$$r \xrightarrow{\pi_B} s$$

$$(A_\infty, A, U, B'') \rightarrow (C, C_\infty, V, B'')$$

El eje está formado por las intersecciones de las rectas definidas por parejas (UV) y $(U'V)$. Se trata de la recta e paralela a AC que pasa por B'' .

Consideramos ahora la aplicación entre el haz de rectas de polo A y el de polo C definido haciendo corresponder a una recta AV del primero, la recta CU del segundo siendo (U, V) un par de homólogos por π_B .

Esto es evidentemente otra proyectividad: los puntos de intersección de los pares de rectas homólogas forman una cónica que pasa por los vértices A y C . Este es el lugar geométrico buscado.

Tomando ahora la recta paralela a AC por B , que intersecta a r y s en U_1 y V_1 respectivamente, es obvio que AV_1 y CU_1 son las medianas desde A y C , por tanto G , el baricentro de ABC , es otro punto de la cónica. Es evidente, observando la figura, que BB'' es la mediana desde B que resta.

La recta e , eje de π_B , contiene un punto de este lugar: B'' (donde $U = V$) y ninguno más, pues $P = AV \cap CU \in e$ significaría que los puntos A y C se corresponden en la proyección. Es tangente a la cónica.

También son tangentes a la cónica las rectas BA y BC . En efecto: si $c = BA$ contiene un punto del lugar distinto de A , el punto V de s , que permite definirlo sólo puede ser C_∞ , su proyección por B sobre r es $U = A$, por tanto $AV \cap CU = A$. Luego BA es tangente.

De forma análoga se demuestra que BC también es tangente y, en consecuencia, la recta AC es la polar de B .

Sean A' y C' las proyecciones desde B sobre la recta eje e , de los puntos A y C . El lugar geométrico es una cónica inscrita en el triángulo $A'BC'$ y que pasa por los puntos medios del mismo.

La recta GB'' es un eje de esta cónica, pues pasa por el punto medio B' de AC , y la tangente en B'' es paralela a AC . El centro es el punto medio O de este segmento, que es el baricentro del triángulo $A'BC'$, ya que $B''G = 2B'B - \frac{2}{3}B'B = \frac{4}{3}B'B$; $B''O = OG = \frac{1}{2}B''G = \frac{2}{3}B'B = \frac{1}{3}B''B$.

Se trata de la elipse inscrita de Steiner de este triángulo $T' = A'BC'$, y es la de mayor área inscrita en él.

Solución analítica

Tomando coordenadas baricéntricas relativas al triángulo ABC , tenemos para las rectas r y s las ecuaciones $r: y + z = 0; s: x + y = 0$. Su punto común es $B'' = (1: -1: 1)$.

Si se toma un punto genérico $X \neq B$, $X(m:n:p)$, la ecuación de la recta $t = BX$ será $t: px - mz = 0$. El punto $U = r \cap t = (m: -p: p)$ y $V = s \cap t = (m: -m: p)$.

Para las rectas AV y UC tenemos las ecuaciones $r_{AV}: py + mz = 0$ y $r_{CU}: px + my = 0$.

Resolviendo el sistema formado por estas dos rectas se encuentran las coordenadas de un punto genérico del lugar $P = (m^2: -mp: p^2)$. Claramente los puntos A, B'' y C tienen esa forma.

Lo primero que se ve fácilmente es que ese punto no está situado en la recta del infinito, de ecuación $x + y + z = 0$, pues $m^2 - mp + p^2 = (m - p)^2 + mp \neq 0$ siempre que $mp \neq 0$ (o sea $X \neq B$).

Si m o p son nulos se obtienen los puntos A y C .

Apoyándonos en el razonamiento geométrico de los haces de rectas por A y C , obtenemos que el lugar geométrico es una elipse de ecuación $y^2 = xz$.

Las rectas BA y BC son tangentes a la misma y su centro (polo de la recta del infinito) es el punto $O(2: -1: 2)$ solución del sistema siguiente

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que A y C son los puntos medios de $A'B$ y $C'B$ respectivamente tendremos $A' = 2A - B = (2, -1, 0)$ y $C' = 2C - B = (0, -1, 2)$ (sin necesidad de calcular la ecuación de la paralela a AC por B'') y por tanto el baricentro del triángulo $A'BC'$ es $\frac{1}{3}(A' + B + C') = (2: -1: 2)$, que es el centro O de la cónica.

■