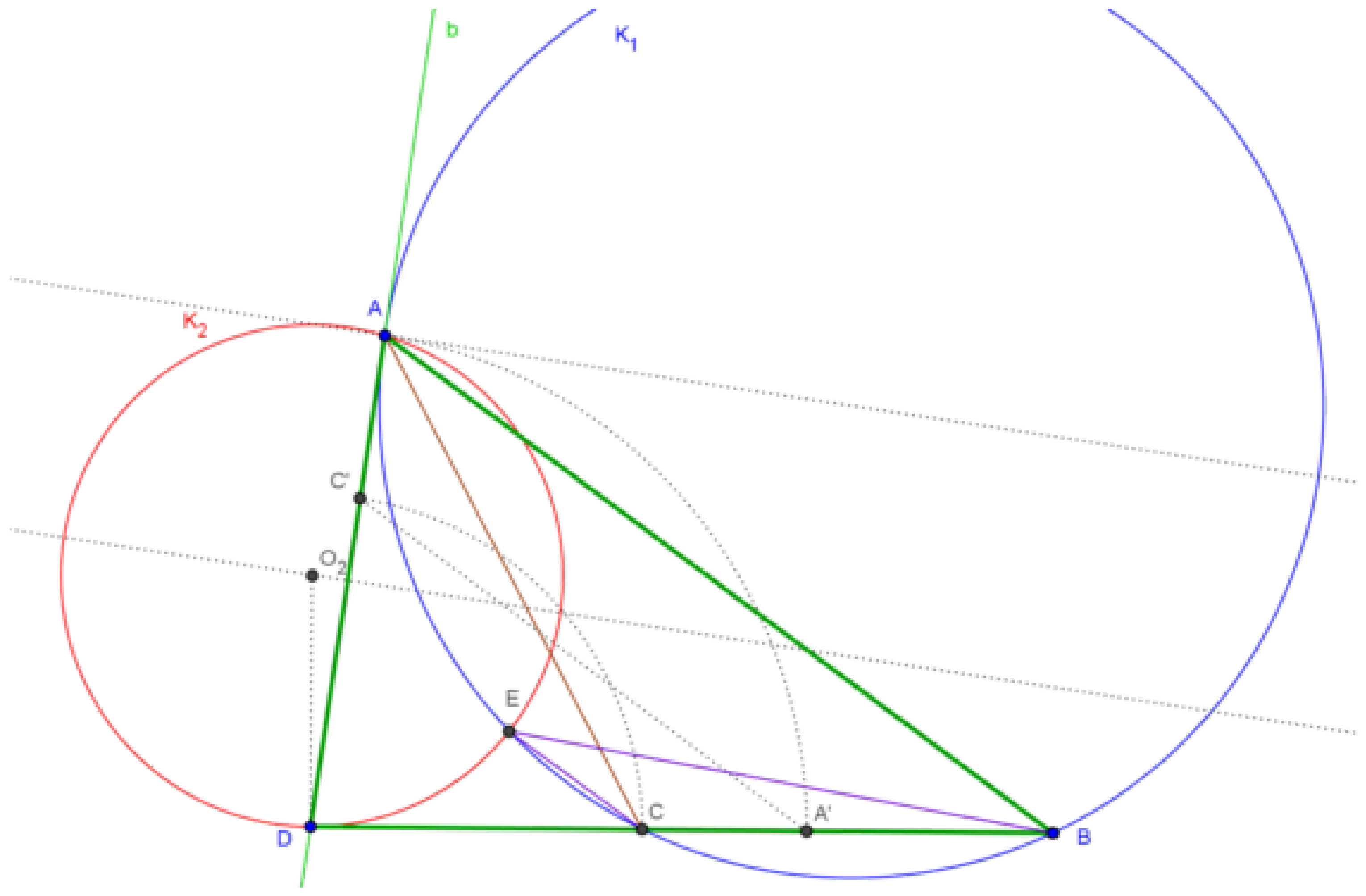
Quincena del 16 al 30 de abril de 2016.

Problema 772.

Problema 482. En el triángulo ABD, sea un punto C distinto de B en el lado BD tal que AD sea tangente a la circunferencia circunscrita K_1 a ABC. Una circunferencia K_2 contiene a A y es tangente a BD en D. K_1 y K_2 intersecan en A y E, con E en el interior del triángulo ACD. Demostrar que $\frac{EB}{EC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3$.

Mathematical Excalibur (2016): Vol 20(3). January – February.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Utilizaremos coordenadas baricéntricas relativas al triángulo ABD. ATENCIÓN, no al ABC como es habitual. Todo será igual sustituyendo la c mayúscula o minúscula por la d correspondiente.

La ecuación de una circunferencia en estas coordenadas es de la forma

$\Gamma(x,y,z) - (x+y+z)(px+qy+rz) = 0$

donde $\Gamma(x,y,z) = 0$ es la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo ABD, es decir:

$a^2yz + b^2zx + d^2xy = 0$

Con esto se tienen para las circunferencias del problema las siguientes ecuaciones:

(K_1): $\Gamma(x,y,z) - b^2(x+y+z)z = 0$

Esta circunferencia corta a la recta $x = 0$ en el punto C; así pues resulta $C = (0{:}\,b^2{:}\,a^2 - b^2)$.

De (K_2) sabemos que pasa por A y D, por tanto su forma general es

(K_2): $\Gamma(x,y,z) - q(x+y+z)y = 0$

Ahora imponemos la condición de ser tangente a $x = 0$ en el punto D, con lo que, en un sencillo cálculo concluimos que

(K_2): $\Gamma(x,y,z) - a^2(x+y+z)y = 0$

Para calcular E, usamos el eje radical de estas circunferencias, la recta $a^2y - b^2z = 0$ y con él resulta $E = (a^2b^2{:}\,b^2d^2{:}\,d^2a^2)$.

Ahora calcularemos las longitudes de los vectores que intervienen en el problema.

En coordenadas baricéntricas, el módulo del vector $v = (\lambda,\mu,\nu), \lambda+\mu+\nu = 0$ es

$\|v\|^2 = \lambda^2S_A + \mu^2S_B + \nu^2S_D$, donde $2S_A = -a^2 + b^2 + d^2$ etc.

El vector $\overrightarrow{AC} = \left(0,\frac{b^2}{a^2},\frac{a^2-b^2}{a^2}\right) - (1,0,0) = \frac{1}{a^2}(-a^2,b^2,a^2-b^2)$.

Para los vectores EB y EC, introducimos el número $m^2 = a^2b^2 + b^2d^2 + d^2a^2$, así tenemos

Vector $\overrightarrow{EB} = \frac{a^2}{m^2}(-b^2,b^2+d^2,-d^2)$; vector $\overrightarrow{EC} = \frac{b^2}{a^2m^2}(-a^4,m^2-d^2a^2,a^4+d^2a^2-m^2)$.

Iniciemos los cálculos:

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 \cdot a^4 = a^4S_A + b^4S_B + (a^2-b^2)^2S_D = a^4(S_A+S_D) + b^4(S_B+S_D) - 2a^2b^2S_D$$
$$= a^4b^2 + b^4a^2 - a^2b^2(a^2+b^2-d^2) = a^2b^2d^2;\ \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = d^2.$$

Por tanto

$$\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2} = \frac{d^2a^4}{a^2b^2d^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$\frac{m^4}{a^4}\cdot\left\|\overrightarrow{EB}\right\|^2 = b^4S_A + (b^2+d^2)^2S_B + d^4S_D = b^4(S_A+S_B) + d^4(S_B+S_D) + 2b^2d^2S_B$$
$$= b^4d^2 + d^4a^2 + b^2d^2(a^2-b^2+d^2)$$
$$= d^2(b^4 + a^2d^2 + b^2a^2 - b^4 + b^2d^2) = d^2m^2$$

$$2\cdot\frac{a^4m^4}{b^4}\cdot\left\|\overrightarrow{EC}\right\|^2 = 2a^8S_A + 2b^4(a^2+d^2)^2S_B + 2(a^4-a^2b^2-b^2d^2)^2S_D = a^8(-a^2+b^2+d^2) + b^4(a^2+d^2)^2(a^2-b^2+d^2) + (a^4-a^2b^2-b^2d^2)^2(a^2+b^2-d^2) = 2(abdm)^2$$

$$\frac{\left\|\overrightarrow{EB}\right\|^2}{\left\|\overrightarrow{EC}\right\|^2} = \frac{a^4d^2m^2}{m^4}\cdot\frac{a^4m^4}{b^4(abdm)^2} = \frac{a^6}{b^6}$$

Finalmente resulta $\frac{EB}{EC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3$, como se pretendía demostrar.

■