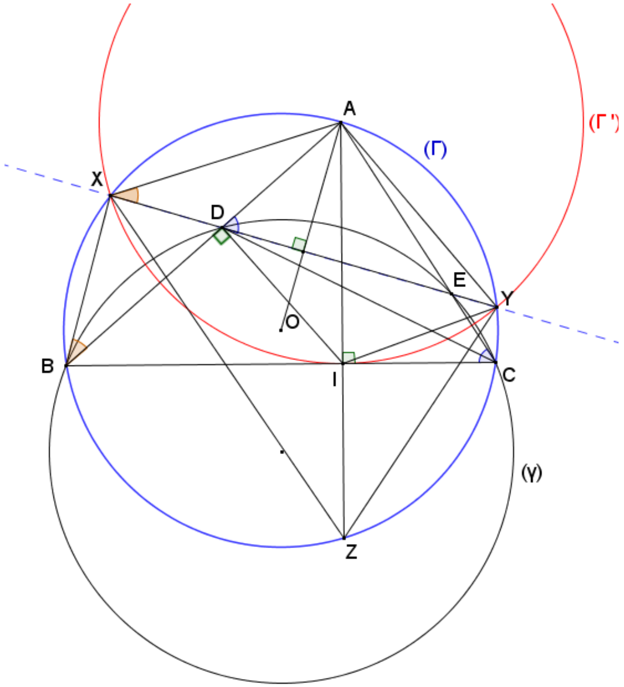
Problema n° 773

Sea BDC un triángulo obtuso (angulo BDC> 90 °), cuya circunferencia circunscrita es (γ).
La perpendicular a BD en el punto D y el lado BC se cortan en el punto I.
La perpendicular a BC en el punto I y la recta BD se cortan en el punto A.
Sea (Γ) la circunferencia circunscrita del triángulo ABC.
La recta AC y la circunferencia(γ) se cortan en un segundo punto E.
La recta DE y la circunferencia (Γ) se cortan en los puntos X e Y.
La recta AI y la circunferencia (Γ) se cortan en un segundo punto Z.
Demostrar que el punto I es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo XYZ.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Les points B,D,E et C appartiennent au cercle (γ). On a donc $\angle ADE = \angle ACB$.
Soit O le centre du cercle (Γ).Comme $\angle OAD = \angle OAB = 90° - \angle AOB/2 = 90° - \angle ACB$, on en déduit $\angle OAD + \angle ADE = \angle OAD + \angle ACB = 90°$.
La droite OA est donc perpendiculaire à DE et c'est la médiatrice de la corde XY dans le cercle (Γ).
Le point A étant milieu de l'arc XY, **la droite ZA est bissectrice de l'angle $\angle XZY$**.

On trace le cercle (Γ') de centre A et de rayon AX = AY.
Comme $\angle ABX = \angle AYX = \angle AXY$, les triangles ADX et AXB sont semblables. D'où $AD.AB = AX^2$.
Le triangle rectangle AIB admet ID comme hauteur. D'où $AD.AB = AI^2$ et AI = AX = AY.Le point I est donc sur le cercle (Γ').
Dans ce même cercle on a $\angle XYI = \angle XAI/2 = \angle XAZ/2$.
Or dans le cercle (Γ), on a $\angle XYZ = \angle XAZ$. Donc $\angle XYI = \angle XYZ/2$ et **la droite YI est bissectrice de l'angle $\angle XYZ$**.

Conclusion : le point I,situé à l'intersection des bissectrices des angles $\angle XZY$ et $\angle XYZ$, est le centre du cercle inscrit au triangle XYZ. Cqfd.