

Problema 774

Siga el triangle $\triangle ABC$. Sobre l'exterior dels seus costats es dibuixen els triangles equilàters $\triangle BCD$, $\triangle ACE$, $\triangle ABF$, d'àrees P, Q, R, respectivament. Siga S l'àrea del triangle $\triangle ABC$. Proveu que $S + P = Q + R$ si i només si $A = 60^\circ$.

Solució de Ricard Peiró i Estruch:

Les àrees dels triangles equilàters P, Q, R són:

$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2, \quad Q = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2, \quad R = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2. \quad \text{Aleshores: } a^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}P, \quad b^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}Q, \quad c^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}R.$$

($\Leftarrow$)

Suposem que $A = 60^\circ$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 60^\circ.$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}P = \frac{4\sqrt{3}}{3}Q + \frac{4\sqrt{3}}{3}R - \frac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{QR}. \quad \text{Simplificant:}$$

$$P = Q + R - \sqrt{QR}.$$

Aplicant la fórmula trigonomètrica de l'àrea del triangle $\triangle ABC$:

$$S = \frac{bc \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{QR} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \sqrt{QR}.$$

Aleshores, $P = Q + R - S$. Per tant, $S + P = Q + R$.

($\Rightarrow$)

Suposem que $S + P = Q + R$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A^\circ.$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}P = \frac{4\sqrt{3}}{3}Q + \frac{4\sqrt{3}}{3}R - 2\frac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{QR} \cdot \cos A.$$

$$P = Q + R - 2\sqrt{QR} \cdot \cos A.$$

Aplicant la fórmula trigonomètrica de l'àrea del triangle $\triangle ABC$:

$$S = \frac{bc \cdot \sin A}{2} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{QR} \sin A}{2} \cdot \sqrt{QR} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sin A} S.$$

$$P = Q + R - 2\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sin A} S \cdot \cos A.$$

$$P - (Q + R) = -\sqrt{3} \frac{\cos A}{\sin A} S.$$

$$-S = -\sqrt{3} \frac{\cos A}{\sin A} S. \quad \text{tg} A = \sqrt{3}, \quad \text{aleshores, } A = 60^\circ.$$

