

Problema 774

Propuesto por Ricard Peiró i Estruch Profesor de Matemáticas del IES "Abastos" (Valencia)

Sea el triángulo ABC. Sobre el exterior de sus lados se dibujan los triángulo equiláteros BCD , ACE y ABF de áreas P, Q, R, respectivamente.

Sea S el área del triángulo ABC Probar que $S+P=Q+R$ si y sólo si el ángulo BAC mide 60° .

Roberts, W. (2003) :The Eutrigon Theorem

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

1er cas : $\angle BAC = 60^\circ$

On désigne par a,b et c les longueurs des côtés BC,CA et AB.

La loi des cosinus dans le triangle ABC donne $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\angle BAC) = b^2 + c^2 - bc$

Soit BH la hauteur issue de B dans le triangle ABC. On a $S = bc \cdot \sin(\angle BAC)/2 = bc \sqrt{3}/4$

On en déduit $S = bc \sqrt{3}/4 = (b^2 + c^2 - a^2) \sqrt{3}/4$

Par ailleurs les aires des trois triangles équilatéraux adossés aux côtés du triangle ABC sont respectivement:

$P = a^2 \sqrt{3}/4$, $Q = b^2 \sqrt{3}/4$ et $R = c^2 \sqrt{3}/4$

En rapprochant ces trois égalités de l'équation donnant S, on obtient $S + P = Q + R$.

2ème cas : $S + P = Q + R$.

Par hypothèse on a $S = Q + R - P = (b^2 + c^2 - a^2) \sqrt{3}/4$

Or $S = bc \cdot \sin(\angle BAC)/2$. D'où $bc = 2S/\sin(\angle BAC)$.

Par ailleurs $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\angle BAC)$. D'où $S = (b^2 + c^2 - a^2) \tan(\angle BAC)/4$

En rapprochant les deux relations qui donnent S, on obtient:

$\tan(\angle BAC) = \sqrt{3}$, soit $\angle BAC = 60^\circ$