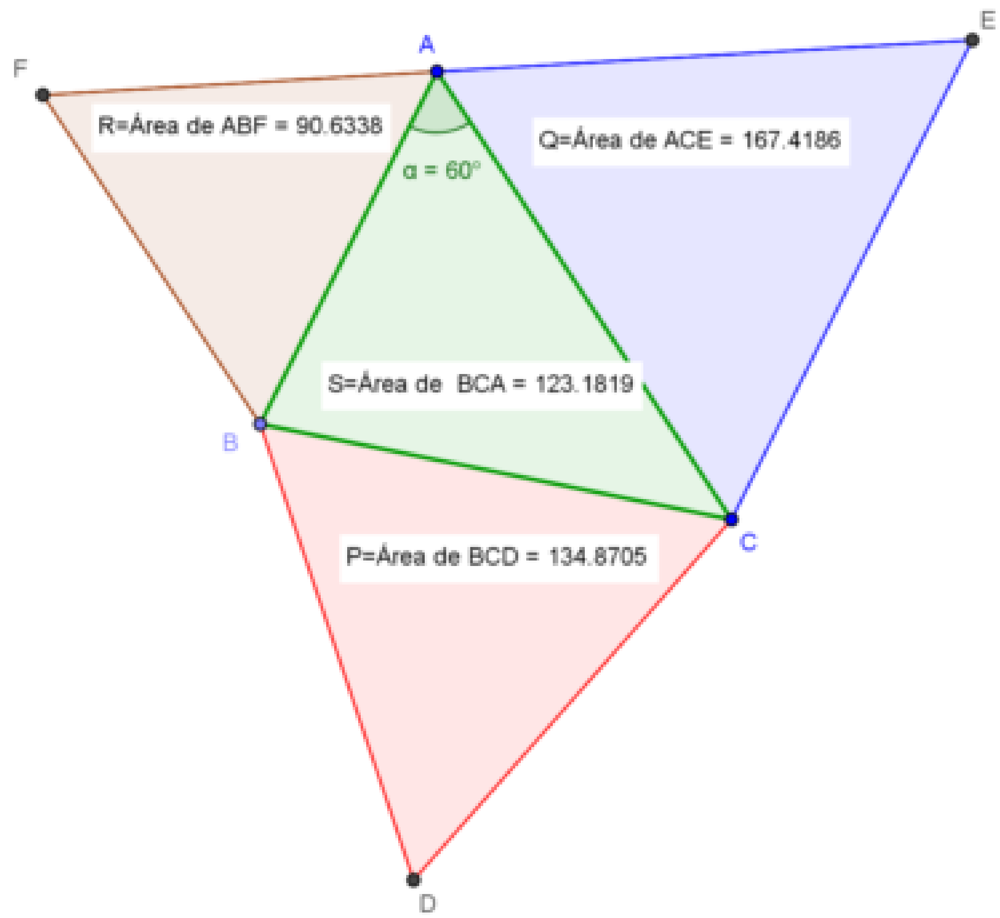
***Problema 774**.- Sea el triángulo ABC. Sobre el exterior de sus lados se dibujan los triángulos equiláteros BCD, ACE y ABF de áreas P, Q, R, respectivamente.*

Sea S el área del triángulo ABC. Probar que S+P=Q+R si y sólo si el ángulo BAC mide 60º.

Roberts, W. (2003) : The Eutrigon Theorem.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



El área de un triángulo equilátero es $\Delta = l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$. Aplicándola, tendremos para la suma de las de los triángulos exteriores opuestos a B y C: $Q + R = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (b^2 + c^2)$.

El área del triángulo ABC se puede expresar como $S = \frac{1}{2} bc \cdot \operatorname{sen} A$. La suma con la del triángulo que resta es $S + P = \frac{1}{2} bc \cdot \operatorname{sen} A + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$.

La igualdad de esas sumas equivale a $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (-a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{2} bc \cdot \operatorname{sen} A$.

Según el teorema del coseno $-a^2 + b^2 + c^2 = 2bc \cdot \cos A$, por tanto, sustituyendo, se tiene

$$\frac{\sqrt{3}}{2} bc \cdot \cos A = \frac{1}{2} bc \cdot \operatorname{sen} A$$

o bien

$$\tan A = \sqrt{3}$$

Necesariamente el ángulo A ha de ser 60º y recíprocamente.

■