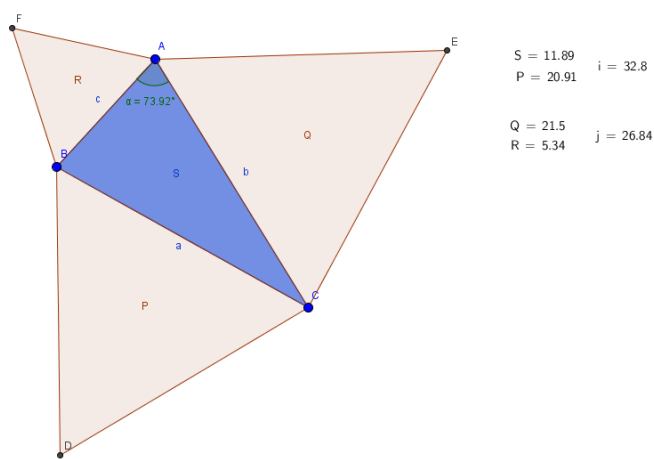
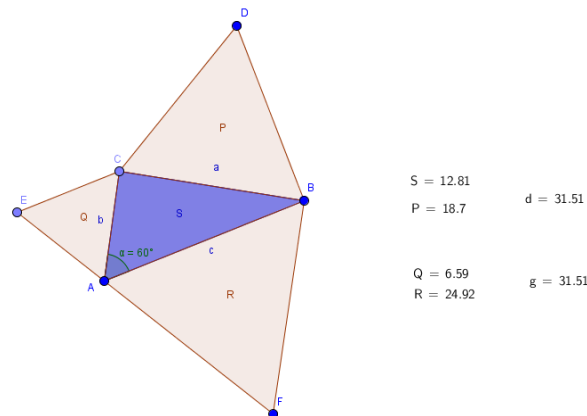
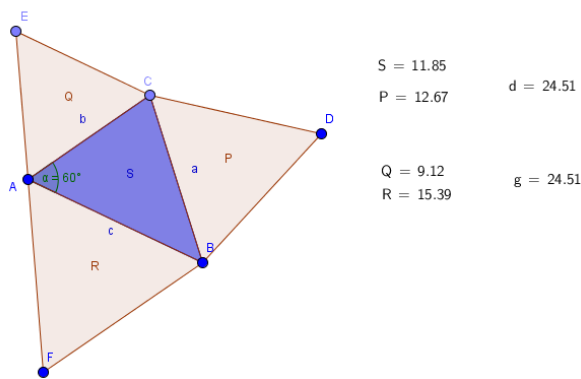


Problema 774. Roberts, W. (2003): The Eutrigon Theorem

Juan Antonio Villegas Recio.

Alumno de 2º Bachillerato del I.E.S. Blas Infante (Córdoba)

Sea el triángulo ABC. Sobre el exterior de sus lados se dibujan los triángulos equiláteros BCD, ACE y ABF de áreas P, Q, R, respectivamente. Sea S el área del triángulo ABC. Probar que $S+P=Q+R$ si y sólo si el ángulo BAC mide 60° .



Efectivamente, comprobamos que independientemente del valor de los lados, siempre que $\hat{A}$ mida 60° se cumplirá que $S+P=Q+R$ ($d=g$)

Además, comprobamos que si el ángulo $\hat{A}$ no mide 60° , tampoco se cumplirá que $S+P=Q+R$ ($i \neq j$)

Para empezar, tenemos que demostrar dos cosas:

1. Si $\hat{A}=60^\circ$; entonces $S+P=Q+R$
2. Si $S+R=Q+R$; entonces $\hat{A}=60^\circ$

1. DEMOSTRAR QUE SI $\hat{A}=60$, ENTONCES $S+P=Q+R$

$$Q + R = \frac{1}{2}b^2 \text{sen}60^\circ + \frac{1}{2}c^2 \text{sen}60^\circ = \frac{1}{2} \text{sen}60^\circ (b^2 + c^2)$$

$$S + P = \frac{1}{2}bc \cdot \text{sen}60^\circ + \frac{1}{2}a^2 \text{sen}60^\circ = \frac{1}{2} \text{sen}60^\circ (bc + a^2)$$

Si $\hat{A}=60^\circ$, demostrar que $b^2+c^2=bc+a^2$.

Para demostrar esa igualdad recurrimos al teorema del coseno, que afirma que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

Observamos la similitud con la ecuación anterior, para que en $b^2+c^2=bc+a^2$ se verifique el teorema del coseno, debe cumplirse que $2\cos \hat{A}=1$, si $\hat{A}=60^\circ$, se cumple que $2\cos 60^\circ = 1$; $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

Se verifica el teorema del coseno a partir de la suposición de $\hat{A}=60^\circ$, Como Queríamos Demostrar.

2. DEMOSTRAR QUE SI $S+P=Q+R$, ENTONCES $\hat{A}=60$

Planteando la primera ecuación, despejando S: $S=Q+R-P$;

$$S = \frac{1}{2}b^2 \text{sen}60^\circ + \frac{1}{2}c^2 \text{sen}60^\circ - \frac{1}{2}a^2 \text{sen}60^\circ = \frac{1}{2} \text{sen}60^\circ (b^2 + c^2 - a^2)$$

Por otro lado, $S = \frac{1}{2}bc \cdot \text{sen} \hat{A}$. Así,

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} (b^2 + c^2 - a^2) = \frac{1}{2} bc \cdot \text{sen} \hat{A}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} (b^2 + c^2 - a^2) = bc \cdot \text{sen} \hat{A}$$

Despejando $\text{sen} \hat{A}$:

$$\text{sen} \hat{A} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc}$$

Así, ahora queremos demostrar que $\text{sen} \hat{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, es decir, que

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} = 1, \text{ llegando de nuevo al teorema del coseno, ya que}$$

$b^2 + c^2 - a^2 = bc$, teniendo ahora de nuevo que demostrar que $2\cos \hat{A} = \frac{1}{2}$, siendo $\hat{A}=60^\circ$ el unico valor positivo menor que 180°

que satisface esa ecuación.