Problema 775

Propuesto por R. Barroso.

Enunciado

Sea ABC con AB>AC.
Sea ABF equilátero hacia fuera de ABC.
Sea BCG equilátero hacia dentro de ABC.
G pertenece a AF si y sólo si <A=60°.

Soluciones de César Beade y M. Gándara

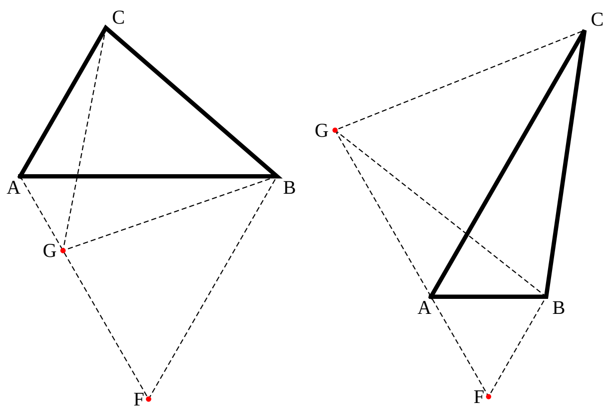
Primera solución

Consideremos el triángulo de vértices A(0,0), B(1,0) y C(a,am), es decir C situado sobre la recta y=mx que pasa por A.

Los puntos F y G tienen coordenadas $F(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ y $G(\frac{1+a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a\,m, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\,(1-a) + \frac{a\,m}{2})$. La alineación de A, F y G equivale a

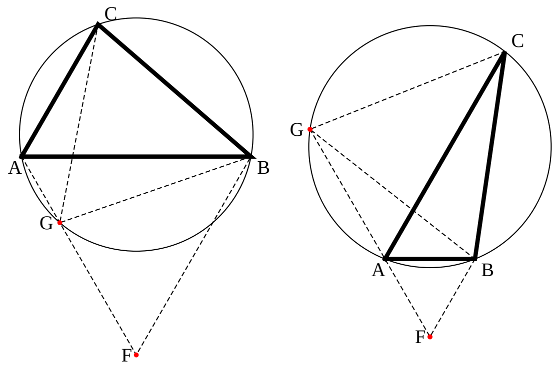
$$\text{Det(AF,AG)} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1+a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a\,m \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3}\,(1-a) + \frac{a\,m}{2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}\,a}{2} - \frac{a\,m}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt{3},$$ es decir que el ángulo en A mide 60°.

La condición AB>AC, hace que G esté situado entre A y F.



■ Segunda solución

Out[229]=



La circunferencia circunscrita ABC corta al lado AF (1) del triángulo ABF en un punto G. Si suponemos que el ≺ BAC mide 60º, lo mismo ha de medir el ≺ BGC. Además como ≺CAG = ≺CAF = 120º, entonces por la conciclidad de AGBC, su opuesto ≺GBC = 60º. Por tanto el triángulo BCG es equilátero.
Reciprocamente, si consideremos alineados AGF (2), ≺BAG = ≺BAF = 60º =≺BCG, por lo que A está sobre la circunefrencia BCG. De la conciclidad de BCAG deducimos que ≺CAG = 180 - ≺CBG = 120º, por tanto ≺BAC = 60º.

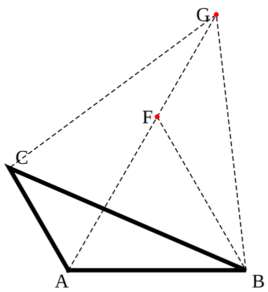
■ Notas

(1) Si cortara a la prolongación ≺BAG = 120º, por lo que ≺BCG = 60º (ABCG concícli-cos) y como BGC = 60º (mismo arco que ≺BAC, que suponemos mide 60º), el trián-gulo BCG es equilátero.
(2) Si la alineación es GAF (G exterior a AF), BAG 0 180º-BAF = 120º y como BCG = 60º, ABCG conciclícos y por tanto A mide 60º al abarcar el mismo arco que CGB.

■ Apéndice

Existe un problema, en cierto sentido dual, si tomamos A = 120º e intercambiamos la posición de los triángulos. Queda claro en el siguiente dibujo.

Out[294]=



Aquí F siempre está entre A y G.
Todavía una tercera pregunta. Tanto para A=60º, como para A=120º volvemos a intercambiar la posición de los triángulos, ¿qué posición adopta el segmento FG?