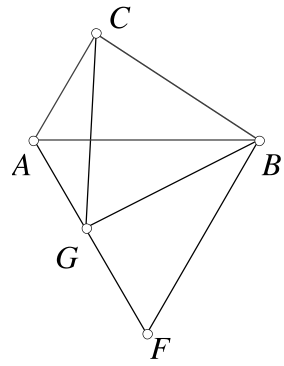
Problema 775 de *triánguloscabri*. *Dado un triángulo ABC con $AB > AC$, construimos los triángulos equiláteros ABF externamente sobre AB y BCG internamente sobre BC. Demostrar que G está sobre AF si y solo si $A = 60°$.*



Solución por Francisco Javier García Capitán. Asignamos coordenadas cartesianas, sin pérdida de generalidad, situando el triángulo ABC de manera que $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$ y $C = (2x, 2y)$ con $y > 0$.

Usamos las ecuaciones de un giro: Si (x', y') es el resultado de girar un ángulo α el punto (x, y) alrededor del punto (x_0, y_0), se tiene que

$$\begin{cases} x' = x_0 + (x - x_0)\cos\alpha - (y - y_0)\operatorname{sen}\alpha \\ y' = y_0 + (x - x_0)\operatorname{sen}\alpha + (y - y_0)\cos\alpha \end{cases}.$$

Entonces, podemos obtener que los puntos F y G del enunciado tienen coordenadas

$$F = \left(1 + x - \sqrt{3}y, -\sqrt{3} + \sqrt{3}x + y\right), \quad G = \left(1, -\sqrt{3}\right).$$

Los puntos A, F, G están alineados si se cumple la condición

$$-\sqrt{3} + \sqrt{3}x + y = -\sqrt{3}\left(1 + x - \sqrt{3}y\right) = -\sqrt{3} - \sqrt{3}x + 3y$$

$$\Leftrightarrow 2y = \sqrt{3}(2x).$$

indicando que debe ser $\angle CAB = 60°$.